GEOMETRIA ANALÍTICA DE L'ESPAI

INTRODUCCIÓ

Llibre d'exercicis totalment desenvolupats i raonats a nivell de batxillerat amb l'objectiu d'assolir els coneixements i procediments en matèria de: Geometria Analítica de l'espai.

El coneixement d'un trajecte no és més que el punt de partida. El caminar amb els sues obstacles ens fan uns experts en minimitzar el seu recorregut.
Sense esforç mai trobaràs la satisfacció d'un bon resultat.

Xavier Rabasa Arévalo
Professor de Matemàtiques
jrabasa@xtec.cat

ÍNDEX

VECTORS A L'ESPAI

OPERACIONS AMB VECTORS

(2,4,5) + (3,5,7) = (5,9,12)	*(2,4,5) - (3,5,7) = (-1,-1,-2)*
(5)·(2,4,5) = (10,20,25)	*(-1)·(2,4,5) = (-2,-4,-5)*

IDENTITAT DE VECTORS $\vec{v} = (a,b,c)$ *i* $\vec{w} = (d,e,f)$.

$$\vec{v} = \vec{w} \Leftrightarrow \begin{cases} d = a \\ e = b \\ f = c \end{cases}$$

MÒDUL D'UN VECTOR $\vec{v} = (a,b,c)$.

$$\left|\vec{v}\right| = \left|(a,b,c)\right| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

VECTOR UNITARI amb la mateixa direcció que $\vec{v} = (a,b,c)$.

$$\vec{u} = \pm\frac{\vec{v}}{\left|\vec{v}\right|} = \pm\frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}(a,b,c)$$

PRODUCTE ESCALAR dels vectors $\vec{v} = (a,b,c)$ *i* $\vec{w} = (d,e,f)$ *que formen entre ells un angle* α.

$$\vec{v}\cdot\vec{w} = ad + be + cf = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}\cdot\sqrt{d^2 + e^2 + f^2}\cdot\cos\alpha$$

PRODUCTE VECTORIAL dels vectors $\vec{v}=(a,b,c)$ *i* $\vec{w}=(d,e,f)$

$$\boxed{\vec{v}\wedge\vec{w}=(a,b,c)\wedge(d,e,f)=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a & b & c\\ d & e & f\end{vmatrix}=\left(\begin{vmatrix}a & b\\ e & f\end{vmatrix},-\begin{vmatrix}a & c\\ d & f\end{vmatrix},\begin{vmatrix}a & b\\ d & e\end{vmatrix}\right)}$$

MÒDUL DEL PRODUCTE VECTORIAL dels vectors $\vec{v}=(a,b,c)$ *i* $\vec{w}=(d,e,f)$ *que formen entre ells un angle* α.

$$\boxed{\left|\vec{v}\wedge\vec{w}\right|=\left|\vec{v}\right|\cdot\left|\vec{w}\right|\cdot\sin\alpha}$$

ÀREA DEL TRIANGLE format pels vectors $\vec{v}=(a,b,c)$ *i* $\vec{w}=(d,e,f)$ *que formen entre ells un angle* α.

$$\boxed{S=\frac{1}{2}\left|\vec{v}\wedge\vec{w}\right|}$$

PRODUCTE MIXT dels vectors $\vec{v}=(a,b,c)$, $\vec{w}=(d,e,f)$ *i* $\vec{z}=(g,h,i)$.

$$\boxed{\vec{v}\cdot(\vec{w}\wedge\vec{z})=(a,b,c)\cdot((d,e,f)\wedge(g,h,i))=\begin{vmatrix}a & b & c\\ d & e & f\\ g & h & i\end{vmatrix}}$$

VOLUM DEL TETRAEDRE format per $\vec{v}=(a,b,c)$, $\vec{w}=(d,e,f)$ *i* $\vec{z}=(g,h,i)$.

$$V=\frac{1}{6}\left|\vec{v}\cdot(\vec{w}\wedge\vec{z})\right|=\frac{1}{6}\cdot\left|\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}\right|$$

PARAL·LELISME dels vectors $\vec{v}=(a,b,c)$ *i* $\vec{w}=(d,e,f)$

$$\boxed{\vec{v}\,\|\,\vec{w}\Leftrightarrow\frac{a}{d}=\frac{b}{e}=\frac{c}{f}}$$

PERPENDICULARITAT dels vectors $\vec{v}=(a,b,c)$ *i* $\vec{w}=(d,e,f)$

$$\boxed{\vec{v}\perp\vec{w}\Leftrightarrow a\cdot d+b\cdot e+c\cdot f=0}$$

ANGLE ENTRE DOS VECTORS $\vec{v}=(a,b,c)$ *i* $\vec{w}=(d,e,f)$.

$$\vec{v}\cdot\vec{w}=ad+be+cf=\sqrt{a^2+b^2+c^2}\cdot\sqrt{d^2+e^2+f^2}\cdot\cos\alpha \qquad \Rightarrow$$

$$\boxed{\cos\alpha=\frac{\vec{v}\cdot\vec{w}}{\left|\vec{v}\right|\cdot\left|\vec{w}\right|}=\frac{ad+be+cf}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}\cdot\sqrt{d^2+e^2+f^2}}}$$

VECTOR QUE UNEIX DOS PUNTS $A(a,b,c)$ *i* $B(d,e,f)$.

$$\boxed{\overrightarrow{AB}=B-A=(d-a,e-b,f-c)}$$

EXERCICIS

1.

Donat el vector $\overrightarrow{AB} = (2,-1,3)$ *i el punt* $B(3,1,2)$ *trobeu les coordenades del punt* A.

RAONAMENT

$$\overrightarrow{AB} = B - A \Rightarrow A = B - \overrightarrow{AB} = (3,1,2) - (2,-1,3) = (1,2,-1) \Rightarrow \boxed{A(1,2,-1)}$$

2

Donats els punts $A(1,2,-1), B(0,3,1), C(1,1,1)$ *i* $D(0,2,5)$ *esbrina si els vectors* $\overrightarrow{AB}$ *i* $\overrightarrow{CD}$ *són equipol·lents, en cas negatiu substitueix D per D' per tal que ho siguin.*

RAONAMENT

$$\overrightarrow{AB} \approx \overrightarrow{CD'} \Rightarrow B - A = D' - C \Rightarrow D' = C + B - A = (1,1,1) + (0,3,1) - (1,2,-1)$$

$$\Rightarrow \boxed{D'(0,2,3)} \quad i \quad D \neq D'$$

3

Donats els punts $A(1,0,1)$ *i* $B(3,2,2)$, *trobeu el vector* $\overrightarrow{AB}$ *i el seu mòdul.*

RAONAMENT

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (3,2,2) - (1,0,1) = (2,2,1) \Rightarrow \boxed{\begin{cases} \overrightarrow{AB} = (2,2,1) \\ \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{4+4+1} = 3 \end{cases}}$$

4

Donats els punts $A(3,0,5)$ *i* $B(3,4,7)$, *trobeu les coordenades del punt mig.*

RAONAMENT

$$\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\Rightarrow M=A+\frac{1}{2}(B-A)=\frac{A+B}{2}=(3,2,6)\quad\Rightarrow\quad\boxed{M(3,2,6)}$$

5

Dos vèrtexs consecutius d'un paral·lelogram són: $A(1,1,1)$ i $B(0,1,-1)$ i el centre $M(2,2,2)$, trobeu els altres dos vèrtexs.

RAONAMENT

$$\begin{cases} M=\dfrac{A+C}{2} \\ M=\dfrac{B+D}{2} \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} C=2M-A=(3,3,3) \\ D=2M-B=(4,3,5) \end{cases}\quad\Rightarrow\quad\boxed{\begin{cases} C(3,3,3) \\ D(4,3,5) \end{cases}}$$

6

Donats els punts $A(3,0,1)$ i $B(0,3,1)$ trobeu els dos punts que divideixen el segment AB en tres parts iguals

RAONAMENT

$$\begin{cases} \overrightarrow{AP}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB} \\ \overrightarrow{AQ}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB} \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} P=A+\dfrac{1}{3}(B-A) \\ Q=A+\dfrac{2}{3}(B-A) \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} P=\dfrac{2A+B}{3} \\ Q=\dfrac{A+2B}{3} \end{cases}\quad\Rightarrow\quad\boxed{\begin{cases} P(2,1,1) \\ Q(1,2,1) \end{cases}}$$

7

Els punts mitjans d'un triangle A B C són $A'(1,1,1)$, $B'(2,2,1)$ i $C'(3,2,0)$, trobeu els vèrtexs A,B,C .

RAONAMENT

$$\begin{cases} A' = \dfrac{B+C}{2} \\ B' = \dfrac{A+C}{2} \\ C' = \dfrac{A+B}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F_1: \quad B+C = 2A' \\ F_2: \quad A+C = 2B' \\ F_3: \quad A+B = 2C' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F_2+F_3-F_1 \\ F_1+F_3-F_2 \\ F_1+F_2-F_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} A = B'+C'-A' \\ B = A'+C'-B' \\ C = A'+B'-C' \end{matrix}$$

$$\boxed{\begin{matrix} A = B'+C'-A' = (4,3,0) \\ B = A'+C'-B' = (2,1,0) \\ C = A'+B'-C' = (0,1,2) \end{matrix}}$$

8

Donats els punts $A(2,1,2)$ i $B(6,-3,-2)$ trobeu tres punts P,Q,R que divideixen el segment AB en quatre parts iguals.

RAONAMENT

$$\begin{cases} P = A + \dfrac{1}{4}\overrightarrow{AB} = (2,1,2) + \dfrac{(4,-4,-4)}{4} = (3,0,1) \\ Q = A + \dfrac{2}{4}\overrightarrow{AB} = (2,1,2) + \dfrac{(8,-8,-8)}{4} = (4,-1,0) \\ R = A + \dfrac{3}{4}\overrightarrow{AB} = (2,1,2) + \dfrac{(12,-12,-12)}{4} = (5,-2,-1) \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{matrix} P(3,0,1) \\ Q(4,-1,0) \\ R(5,-2,-1) \end{matrix}}$$

9

Esbrineu si els punts $A(1,2,3)$, $B(4,1,3)$ i $C(7,0,3)$ estan afilerats.

RAONAMENT

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB} = B - A = (3,-1,0) \\ \overrightarrow{AC} = C - A = (6,-2,0) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{AC} = 2\cdot\overrightarrow{AB} \Rightarrow \text{vectors paral·lels}$$

Els tres punts estan afilerats.

10

Calculeu els valors d'x i d'y per tal que el vector $\vec{w}=(x,y,2)$ *sigui perpendicular als vectors* $\vec{u}=(1,-1,0)$ *i* $\vec{v}=(2,0,-1)$.

RAONAMENT

$$\begin{cases}\vec{w}\perp\vec{u}\\ \vec{w}\perp\vec{v}\end{cases}\Rightarrow\begin{matrix}\vec{w}\cdot\vec{u}=0\\ \vec{w}\cdot\vec{v}=0\end{matrix}\Rightarrow\begin{matrix}x-y+0=0\\ 2x+0-2=0\end{matrix}\Rightarrow\boxed{\begin{matrix}x=1\\ y=1\end{matrix}}\Rightarrow\quad\boxed{\vec{w}=(1,1,2)}$$

11

Calcula el valor del paràmetre a per tal que el producte vectorial de $\vec{u}=(1,1,0)$ *per* $\vec{v}=(2,a,0)$ *tingui la direcció de l'eix OZ.*

RAONAMENT

1.vector unitari en direcció a l'eix OZ, $\vec{k}=(0,0,1)$

2.producte vectorial

$$\vec{w}=\vec{u}\wedge\vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 1 & 0\\ 2 & a & 0\end{vmatrix}=0\cdot\vec{i}+0\cdot\vec{j}+(a-2)\cdot\vec{k}=(0,0,a-2)$$

3.la condició de paral·lelisme entre $\vec{w}$ *i* $\vec{k}$ *es compleix sempre que* $\boxed{a\neq 2}$

12

Calculeu el producte vectorial de: $\vec{u}=(2,-1,0)$ *per* $\vec{v}=(3,1,-1)$.

RAONAMENT

$$\vec{w}=\vec{u}\wedge\vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & -1 & 0\\ 3 & 1 & -1\end{vmatrix}=1\cdot\vec{i}+2\cdot\vec{j}+5\cdot\vec{k}\quad\Rightarrow\quad\boxed{\vec{u}\wedge\vec{v}=(1,2,5)}$$

13

Donats els vectors $\vec{a}=(1,0,-1),\ \vec{b}=(1,1,1),\ \vec{c}=(1,2,-3)$ *calculeu:*

$\vec{a}\wedge(\vec{b}\wedge\vec{c})\quad i \quad (\vec{a}\wedge\vec{b})\wedge\vec{c}$

RAONAMENT

$$\left\{\begin{array}{l} \vec{b}\wedge\vec{c}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & -3\end{vmatrix}=(-5,4,1) \\ \vec{a}\wedge\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 0 & -1\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}=(-1,-2,1)\end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \vec{a}\wedge(\vec{b}\wedge\vec{c})=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 0 & -1\\ -5 & 4 & 1\end{vmatrix} \\ (\vec{a}\wedge\vec{b})\wedge\vec{c}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -1 & -2 & 1\\ 1 & 2 & -3\end{vmatrix}\end{array}\right.$$

$$\boxed{\begin{cases}\vec{a}\wedge(\vec{b}\wedge\vec{c})=(4,4,4)\\ (\vec{a}\wedge\vec{b})\wedge\vec{c}=(4,4,4)\end{cases}}$$

14

Trobeu el volum del paral·lelepípede format pels vectors $\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}$ *on:* $\overrightarrow{OA}=(1,0,1),\ \overrightarrow{OB}=(2,1,-1)\ i\ \overrightarrow{OC}=(2,2,-1).$

RAONAMENT

$$V=\left|\overrightarrow{OA}\cdot(\overrightarrow{OB}\wedge\overrightarrow{OC})\right|=\left\|\begin{matrix}1 & 0 & 1\\ 2 & 1 & -1\\ 2 & 2 & -1\end{matrix}\right\|=|1-0+2| \quad\Rightarrow\quad \boxed{V=3}\ u^3$$

15

Trobeu el volum del tetràedre $ABCD$ *on:* $\overrightarrow{AB}=(1,4,2)$, $\overrightarrow{AC}=(1.0.0)$, $\overrightarrow{AD}=(2,1,-1)$.

RAONAMENT

$$V=\frac{1}{6}\left|\overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{AC}\wedge\overrightarrow{AD})\right|=\frac{1}{6}\left\|\begin{matrix}1 & 4 & 2\\ 1 & 0 & 0\\ 2 & 1 & -1\end{matrix}\right\|=\frac{1}{6}|0+4+2| \quad\Rightarrow\quad \boxed{V=1}\ u^3$$

16

Calculeu l'àrea del triangle ABC on: $A(2,2,2),B(1,-1,0),C(0,1,2)$.

RAONAMENT

$$\begin{cases}\overrightarrow{AB}=(-1,-3,-2)\\ \overrightarrow{AC}=(-2,-1,0)\end{cases}\Rightarrow S=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right|=\frac{1}{2}\left\|\begin{matrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -1 & -3 & -2\\ -2 & -1 & 0\end{matrix}\right\|=\frac{1}{2}|(-2,4,-5)|$$

$$\Rightarrow \qquad S=\frac{1}{2}\sqrt{4+16+25}=\frac{\sqrt{45}}{2} \qquad \boxed{S=\frac{3}{2}\sqrt{5}}\ u^2$$

17

Calculeu el volum i l'àrea de la base d'una piràmide de vèrtex $V(1,0,-1)$ *i base el paral·lelogram ABDC (A i D oposats pel centre del paral·lelogram) on:* $A(1,1,0),B(2,1,-2)$ *i* $C(0,2,0)$.

RAONAMENT

$\overrightarrow{AB}=(1,0,-2)$ $\quad\overrightarrow{AC}=(-1,1,0)$ $\quad\overrightarrow{AV}=(0,-1,-1)$

$$V=2\cdot\frac{1}{6}\left|\overrightarrow{AV}.(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC})\right|=\frac{1}{3}\begin{vmatrix}0 & -1 & -1\\ 1 & 0 & -2\\ -1 & 1 & 0\end{vmatrix}=\frac{1}{3}|0-2-1| \quad\Rightarrow\quad \boxed{V=1}\ u^3$$

$$S=\left|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right|=\left\|\begin{matrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 0 & -2\\ -1 & 1 & 0\end{matrix}\right\|=\left|(2,-2,1)\right|=\sqrt{4+4+1}\quad\Rightarrow\quad\boxed{S=3}\ u^2$$

18

Calculeu els dos vectors unitaris $\overrightarrow{w_1}$ i $\overrightarrow{w_2}$ perpendiculars al pla que conté als vectors: $\vec{u}=(1,-1,1)$ i $\vec{v}=(0,1,2)$.

RAONAMENT

$$\vec{u}\wedge\vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 2\end{vmatrix}=(-3,-2,1)\Rightarrow\left|\vec{u}\wedge\vec{v}\right|=\sqrt{9+4+1}=\sqrt{14}$$

$$\begin{cases}\overrightarrow{w_1}=+\dfrac{\vec{u}\wedge\vec{v}}{\left|\vec{u}\wedge\vec{v}\right|}=+\dfrac{1}{\sqrt{14}}(-3,-2,1)\\[2ex] \overrightarrow{w_2}=-\dfrac{\vec{u}\wedge\vec{v}}{\left|\vec{u}\wedge\vec{v}\right|}=-\dfrac{1}{\sqrt{14}}(-3,-2,1)\end{cases}\quad\Rightarrow\quad\boxed{\begin{matrix}\overrightarrow{w_1}=\left(\dfrac{-3}{\sqrt{14}},\dfrac{-2}{\sqrt{14}},\dfrac{1}{\sqrt{14}}\right)\\ \overrightarrow{w_1}=\left(\dfrac{3}{\sqrt{14}},\dfrac{2}{\sqrt{14}},\dfrac{-1}{\sqrt{14}}\right)\end{matrix}}$$

19

Trobeu les coordenades dels punts P i Q, en funció de A i B, que divideixen el segment AB en tres parts iguals.

RAONAMENT

$$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}\qquad P=A+\frac{1}{3}(B-A)=\frac{2A+1B}{3}$$

$$\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}\qquad Q=A+\frac{2}{3}(B-A)=\frac{1A+2B}{3}$$

GEOMETRIA DE L'ESPAI

EINES

EQUACIONS DE LA RECTA, *que passa pel punt* $A(x_0, y_0, z_0)$ *i porta la direcció del vector* $\vec{v} = (a,b,c)$.

1.equació vectorial de paràmetre t, $\boxed{\{(x,y,z) = (x_0, y_0, z_0) + t(a,b,c)\}}$

2.equació paramètrica, $\boxed{\begin{cases} x = x_0 + ta \\ y = y_0 + tb \\ z = z_0 + tc \end{cases}}$

3.equació contínua, $\boxed{\dfrac{x - x_0}{a} = \dfrac{y - y_0}{b} = \dfrac{z - z_0}{c}}$

4.equació implícita $\boxed{\begin{cases} b(x - x_0) = a(y - y_0) \\ c(x - x_0) = a(z - z_0) \end{cases}}$

PUNT GENÈRIC D'UNA RECTA *que passa pel punt* $A(x_0, y_0, z_0)$ *i porta la direcció del vector* $\vec{v} = (a,b,c)$.

$$P(x,y,z) \Rightarrow \begin{cases} x = x_0 + ta \\ y = y_0 + tb \\ z = z_0 + tc \end{cases} \Rightarrow \boxed{P(x_0 + ta, y_0 + tb, z_0 + tc)}$$

EQUACIÓ DEL PLA π *:que passa pel punt* $A(x_0, y_0, z_0)$ *i és perpendicular al vector* $\vec{v} = (a,b,c)$.

$$\pi : \begin{cases} ax + by + cz + ? = 0 \\ ax_0 + by_0 + cz_0 + ? = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{ax + by + cz - (ax_0 + by_0 + cz_0) = 0}$$

FEIX DE PLANS QUE PASSEN PER UNA RECTA $\{r\}$
$\begin{cases} ax+by+cz+d=0 \\ a'x+b'y+c'z+d'=0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{(ax+by+cz+d)+t(a'x+b'y+c'z+d')=0}$

FEIX DE PLANS PARAL·LELS A UN PLA $\pi \equiv \{ax+by+cz+d=0\}$
$\boxed{\pi \equiv \{ax+by+cz+?=0\}}$

RECTA PERPENDICULARS AL PLA $\pi \equiv (ax+by+cz+d=0)$ *que passa pel punt* $A(x_0, y_0, z_0)$.	
Equació contínua	$\boxed{\dfrac{x-x_0}{a}=\dfrac{y-y_0}{b}=\dfrac{z-z_0}{c}}$

POSICIÓ RELATIVA

a) de dos plans $\begin{cases} ax+by+cz+d=0 \\ a'x+b'y+c'z+d'=0 \end{cases}$
1.analitzem el rang de les matrius, $A=\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix}$ *i* $\overline{A}=\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \end{pmatrix}$
2. $\boxed{\begin{cases} rang(A)=rang(\overline{A})=1 \\ rang(A)=rang(\overline{A})=2 \\ rang(A)\neq rang(\overline{A}) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} sup\,erposats \\ incidents \\ paral{\cdot}lels \end{cases}}$

b) recta $r \equiv \begin{cases} ax+by+cz+d=0 \\ a'x+b'y+c'z+d'=0 \end{cases}$ **i pla** $\pi \equiv (a''x+b''y+c''z+d''=0)$
1.analitzem el rang de les matrius,

$$A=\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix} \quad \overline{A}=\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ a'' & b'' & c'' & d'' \end{pmatrix}$$

2. discussió,

$$\begin{cases} rang(A)=rang(\overline{A})=3 \\ rang(A)=rang(\overline{A})=2 \\ rang(A)=2\neq rang(\overline{A})=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} incidents\_en\_un\_punt \\ recta\_continguda\_en\_el\_pla \\ recta\_paral{\cdot}lela\_al\_pla \end{cases}$$

c) de dues rectes $r:\begin{cases} A(x_0,y_0,z_0) \\ \vec{v}=(a,b,c) \end{cases}$ **i** $s:\begin{cases} A(x_1,y_1,z_1) \\ \vec{w}=(a',b',c') \end{cases}$

1.analitzem el rang de les matrius, $A=\begin{pmatrix} a & a' \\ b & b' \\ c & c' \end{pmatrix}$ i $\overline{A}=\begin{pmatrix} a & a' & x_1-x_0 \\ b & b' & y_1-y_0 \\ c & c' & z_1-z_0 \end{pmatrix}$

2. discussió,

$$\begin{cases} rang(A)=rang(\overline{A})=2 \\ rang(A)=rang(\overline{A})=1 \\ rang(A)=2\neq rang(\overline{A})=3 \\ rang(A)=1\neq rang(\overline{A})=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} incidents\_en\_un\_punt \\ rectes\_sup\,erpossades \\ es\_creuen \\ rectes\_paral{\cdot}leles \end{cases}$$

d) de tres plans $\begin{cases} \pi_1:\{ax+by+cz+d=0\} \\ \pi_2:\{a'x+b'y+c'z+d'=0\} \\ \pi_3:\{a''x+b''y+c''z+d''=0\} \end{cases}$

1.analitzem el rang de les matrius,

$$A=\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix} \qquad \overline{A}=\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ a'' & b'' & c'' & d'' \end{pmatrix}$$

2. discussió,

$$\begin{cases} a)\, rang(A) = rang(\overline{A}) = 3 \\ b)\, rang(A) = rang(\overline{A}) = 2 \\ c)\, rang(A) = rang(\overline{A}) = 1 \\ d)\, rang(A) = 2 \neq rang(\overline{A}) = 3 \\ e)\, rang(A) = 1 \neq rang(\overline{A}) = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a)\ \ ncidents\_en\_un\_punt \\ b)\ \ incidents\_en\_una\_recta \\ c)\, plans\_sup\,erpossats \\ d) \begin{cases} dos\_paral{\cdot}lels\_i\_l'altre\_no \\ prisma\_triangular \end{cases} \\ e) \begin{cases} dos\_sup\,erpossats\_i\_un\_paral{\cdot}lel \\ tres\_paral{\cdot}lels \end{cases} \end{cases}$$

DISTÀNCIA ENTRE DOS PUNTS $A(x_0, y_0, z_0)$ i $B(x_1, y_1, z_1)$

$$\boxed{\sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + (z_1 - z_0)^2}}$$

DISTÀNCIA entre PUNT $A(x_0, y_0, z_0)$ **i PLA** $\pi \equiv (ax + by + cz + d = 0)$

$$\boxed{\frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}}$$

ÀREA DEL TRIANGLE $\{A, B, C\}$

$$\boxed{S = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right|}$$

VOLUM DEL TETRÀEDRE $\{A, B, C, D\}$

$$\boxed{V = \frac{1}{6}\left|\overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{AD})\right|}$$

ESTRATÈGIES
DETERMINACIÓ D'UNA RECTA

Donat un punt i un vector
1.es forma l'equació contínua

Donats dos punts
1.es forma el vector que uneix els punts
2.es forma l'equació contínua

Donat un punt i una recta paral·lela
1.es pren el vector de la recta paral·lela com a director de la recta
2.es forma l'equació contínua

Donat un punt i un pla perpendicular a la recta
1.es pren com a vector director de la recta el vector director del pla
2.es forma l'equació contínua

Donat un punt i una recta perpendicular incident
1.pla perpendicular a la recta que passa pel punt
2.punt d'intersecció entre el pla i la recta
3.equació de la recta que passa per dos punts

Que passa per un punt i toca a dues rectes
1.pla que conté a la primera recta i al punt
2.pla que conté a la segona recta i al punt
3.la recta és la intersecció del dos plans

Perpendicular a dues rectes que es creuen
1.producte vectorial $\vec{v}$ dels dos vectors direccionals de les rectes
2.de tots els plans que passen per la primera recta aquell en que el seu vector director és perpendicular a $\vec{v}$
3.de tots els plans que passen per la segona recta aquell en que el seu

vector director és perpendicular a $\vec{v}$
4.la recta cercada és la intersecció dels dos plans

Bisectriu de dues rectes que es tallen
1.cercar el punt de tall
2.formar els vectors unitaris direccionals de les rectes
3.la suma i la resta d'aquests vectors ens donen la direcció de les bisectrius
4.formar les equacions contínues

DETERMINACIÓ D'UN PLA

Donat un punt i dos vectors
1.es pren un punt genèric de l'espai P i es forma el vector que uneix un punt del pla amb el punt genèric
2.s'iguala a zero el producte mixt dels tres vectors

Donat una recta i un punt
1.feix de plans que passen per la recta
2.cerca aquell que passa pel punt

Donats tres punts ABC
1.es pren un punt genèric de l'espai P i es forma el vector AP
2.s'iguala a zero el producte mixt dels tres vectors AB, AC, AP

Donat un punt i una recta perpendicular
1.el vector director de la recta és el vector director del pla
2.feix de plans que tenen aquest vector director
3.cercar aquell que passa pel punt

Donat un punt i un pla paral·lel
1.feix de plans paral·lels
2.cercar aquell que passa pel punt

DETERMINACIÓ D'UN PUNT

Simètric de A respecte d'un pla

1.recta perpendicular al pla que passa pel punt A
2.intersecció de recta i pla per determinar M
3.el punt simètric és 2M-A

Simètric de A respecte d'una recta

1.pla perpendicular a la recta que passa per A
2.punt M intersecció de la recta i el pla
3.el punt simètric és 2M-A

PROBLEMES DE DISTÀNCIES

Entre dos punts

1.cercar el mòdul del vector que uneix els dos punts

Entre un punt A i una recta

*a)***primer mètode**

1.cercar un punt genèric de la recta en funció d'un paràmetre
2.imposar la condició que el vector AP i el direccional de la recta siguin perpendiculars i determinar el punt de la recta de mínima distància
3.calcular la distància entre els dos punts

*b)***segon mètode**

1.pla perpendicular a la recta que passa pel punt
2.punt intersecció del pla i la recta
3.distància entre els dos punts

*c)***tercer mètode**

1.cercar un punt genèric de la recta en funció d'un paràmetre
2.minimitzar la distància al quadrat entre els dos punts
3.determinar el punt de mínima distància i cercar la distància entre els dos punts

Entre un punt i un pla
1.aplicar la fórmula

Entre dues rectes
*a)**primer mètode***
1.pla que conté a la segona recta que és paral·lel a la primera
2.triar un punt de la primera i calcular la distància del punt al pla

*b)**segon mètode***
1.punt genèric de la primera recta en funció d'un paràmetre
2.punt genèric de la segona recta en funció d'un altre paràmetre
3.derivar la distància al quadrat respecte dels dos paràmetres i igualar a zero per determinar els dos punts de mínima distància
4.cercar la distància entre els dos punt

Entre una recta i un pla paral·lel
1.es tria un punt de la recta i es calcula la distància entre punt i pla

Entre dos plans paral·lels
1.es tria un punt del primer pla i es calcula la distància del punt al segon pla

EXERCICIS

1. EQUACIONS DE RECTA I PLA

1.1

Trobeu les equacions de les medianes del triangle de vèrtexs: $A(1,2,0)$, $B(1,0.2)$ *i* $C(1,2,2)$.

RAONAMENT

$$\begin{cases} M_A = \dfrac{B+C}{2} = (1,1,2) & \overrightarrow{AM} = (0,-1,2) \\ M_B = \dfrac{A+C}{2} = (1,2,1) & \overrightarrow{BM} = (0,2,-1) \\ M_C = \dfrac{B+A}{2} = (1,1,1) & \overrightarrow{CM} = (0,-1,-1) \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{matrix} m_A : \left\{ \dfrac{x-1}{0} = \dfrac{y-2}{-1} = \dfrac{z-0}{2} \right\} \\ m_B : \left\{ \dfrac{x-1}{0} = \dfrac{y-0}{2} = \dfrac{z-2}{-1} \right\} \\ m_C : \left\{ \dfrac{x-1}{0} = \dfrac{y-2}{-1} = \dfrac{z-2}{-1} \right\} \end{matrix}}$$

1.2

Trobeu l'equació de la recta que passa pels punts $A(2,1,-1)$, $B(3,0,1)$ *i digueu si* $C(1,0,2)$ *pertany a la recta AB.*

RAONAMENT

Equació de la recta $r_{AB} : \begin{cases} A(2,1,-1) \\ \overrightarrow{AB} = (1,-1,2) \end{cases} \Rightarrow \boxed{\left\{ \dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y-1}{-1} = \dfrac{z+1}{2} \right\}}$

$$C \in r_{AB} \Leftrightarrow \frac{1-2}{1} = \frac{0-1}{-1} = \frac{2+1}{2} \Leftrightarrow -1 = 1 = \frac{3}{2} \Rightarrow \boxed{C \notin r_{AB}} \quad NO$$

1.3

Trobeu l'equació del pla que passa pel punt $A(1,2,1)$ *i conté als vectors* $\vec{v} = (1.-1,0)$ *i* $\vec{w} = (0,3,1)$.

RAONAMENT

$$1.\text{vector director del pla, } \vec{v} \wedge \vec{w} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = (-1,-1,3) \approx (1,1,-3)$$

$$2.\text{equació del pla, } \pi : \begin{cases} x + y - 3z + ? = 0 \\ 1 + 2 - 3 + ? = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\{x + y - 3z = 0\}}$$

1.4

Trobeu l'equació del pla que passa pels punts: $A(1,0,0), B(0,2,0)$ *i* $C(0,0,3)$.

RAONAMENT

$P(x, y, z)$ $\overrightarrow{AP} = (x-1, y, z)$ $\overrightarrow{AB} = (-1, 2, 0)$ $\overrightarrow{AC} = (-1, 0, 3)$

$$\begin{vmatrix} x-1 & y & z \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 0 \qquad x/1 + y/2 + z/3 = 1 \qquad 6x + 3y + 2z - 6 = 0$$

RAONAMENT

$$\begin{cases} \overrightarrow{AP} = (x-1, y-0, z-0) \\ \overrightarrow{AB} = (-1,2,0) \\ \overrightarrow{AC} = (-1,0,3) \end{cases} \Rightarrow \begin{vmatrix} \overrightarrow{AP} \\ \overrightarrow{AB} \\ \overrightarrow{AC} \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} x-1 & y-0 & z-0 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6(x-1) + 3(y-0) + 2(z-0) = 0 \Rightarrow \boxed{6x + 3y + 2z - 6 = 0}$$

1.5

Donats $A(2,0,0), B(0,-1,0), C(0,0,3), A'(-4,0,0), B'(0,2,0), C'(0,0,-6)$ *esbrineu si els plans ABC i A'B'C' són paral·lels.*

RAONAMENT

-vector director del pla ABC,

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB} = (-2,-1,0) \\ \overrightarrow{AC} = (-2,0,3) \end{cases} \Rightarrow \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 3 \end{vmatrix} = (-3,6,-2)$$

-vector director del pla A'B'C',

$$\begin{cases} \overrightarrow{A'B'} = (4,2,0) \\ \overrightarrow{A'C'} = (4,0,-6) \end{cases} \Rightarrow \vec{w} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & -6 \end{vmatrix} = (-12,24,-8) = 4\cdot(-3,6,-2) = 4\vec{v}$$

-els plans són paral·lels

1.6

Esbrineu si els punts $A(1,1,1), B(0,1,-1), C(1,0,3), D(2,1,-1), E(0,0,0)$ pertanyen al mateix pla.

RAONAMENT

-analitzem el rang de la matriu formada pels vectors,

$$M = \begin{pmatrix} \overrightarrow{EA} \\ \overrightarrow{EB} \\ \overrightarrow{EC} \\ \overrightarrow{ED} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 3+1-1 = 3 \neq 0 \\ \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0-2+2 = 0 \end{cases} \Rightarrow rangM = 3$$

-els punts ABCDE no pertanyen a un mateix pla ja què $rangM = 3 \neq 2$

1.7

Trobeu l'equació del pla que conté a la recta $r:\{x=t, y=2-t, z=2+t\}$ *i passa pel punt* $A(1,0,-1)$.

RAONAMENT

1.-feix de plans que contenen a r: $\begin{cases} y=2-x \\ z=2+x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y-2=0 \\ x-z+2=0 \end{cases}$,

$(x+y-2)+\lambda(x-z+2)=0 \Rightarrow \quad (1+\lambda)x+y-\lambda z+(2\lambda-2)=0$

2.-.el que passa per A,

$$\begin{cases} (1+\lambda)x+y-\lambda z+(2\lambda-2)=0 \\ (1+\lambda)\cdot 1+o+\lambda+(2\lambda-2)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{5}{4}x+y-\frac{1}{4}z-\frac{6}{4}=0 \\ \lambda=\frac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow$$

$\boxed{5x+4y-z-6=0}$

1.8

Equació del pla que passa pel punt $A(2,4,1)$ *i conté a la recta d'equació,*

$r:\left\{\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z}{1}\right\}$

RAONAMENT

1.-feix de plans que contenen a la recta r,

r: $\begin{cases} 2x-y=0 \\ x-z-1=0 \end{cases} \Rightarrow (2x-y)+t(x-z-1)=0 \Rightarrow (t+2)x-y-tz-t=0$

2.-per passar pel punt A,

$\begin{cases} (t+2)x-y-tz-t=0 \\ 2(t+2)-4-t-t=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} (t+2)x-y-tz-t=0 \\ \text{identitat} \end{matrix} \Rightarrow$ el punt A pertany a la recta aleshores la solució és tot el feix de plans $\boxed{(t+2)x-y-tz-t=0}$

1.9

Relació entre a,b i c de manera que els punts, $A(1,1,1), B(0,2,-1), C(2,1,0), D(a,b,c)$ *determinin un únic pla.*

RAONAMENT

1.- els vectors $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$, *són linealment dependents aleshores el determinant format pels tres vectors és zero,*

$$\begin{vmatrix} \overrightarrow{AB} \\ AC \\ AD \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ a-1 & b-1 & c-1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -(a-1) - 3(b-1) - (c-1) = 0 \Rightarrow$$

$$-a - 3b - c + 5 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{a + 3b + c - 5 = 0}$$

1.10

Equació del pla que passa pel punt $A(0,1,1)$ *i conté a la recta d'equació,* $r: \{x = 1 - t, y = t + 3, z = 2t + 4\}$.

RAONAMENT

1.-feix de plans que contenen a la recta r,

$$r: \begin{cases} x + y - 4 = 0 \\ 2y - z - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad (x + y - 4) + t(2y - z - 2) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$x + (2t+1)y - tz - (4 + 2t) = 0$$

2.-per passar pel punt A,

$$\begin{cases} x + (2t+1)y - tz - (4+2t) = 0 \\ 0 + (2t+1) - t - (4+2t) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} (t+2)x - y - tz - t = 0 \\ t = -3 \end{matrix} \Rightarrow$$

$$\boxed{(x - 5y + 3z + 2 = 0}$$

2. PARAL·LELISME, INCIDÈNCIA I PERPENDICULARITAT

2.1

Trobeu l'equació de la recta que passa pel punt $A(0,2,1)$ i és paral·lela a l'eix OY, $\left\{\frac{x}{0}=\frac{y}{1}=\frac{z}{0}\right\}$.

RAONAMENT

1.feix de rectes paral·leles a l'eix OY, $\left\{\frac{x-?}{0}=\frac{y-?}{1}=\frac{z-?}{0}\right\}$

2.-per passar pel punt A, $\boxed{\left\{\frac{x-0}{0}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-1}{0}\right\}}$

2.2

Trobeu l'equació de la recta que passa pel punt $A(0,1,0)$ i és paral·lela als plans : $\pi_1:\{2x+y+z-2=0\}$ i $\pi_2:\{x+y+z=2\}$.

RAONAMENT

1.-vector director de la recta, $\vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}=(0,-1,1)$

2.-feix de plans de vector director $\vec{v}$, $\{0-y+z+?=0\}$,

3.-per passar pel punt A, $\begin{cases}-y+z+?=0\\ -1+0+?=0\end{cases}\Rightarrow \begin{matrix}-y+z+1=0\\ ?=1\end{matrix}\Rightarrow \boxed{y-z-1=0}$

2.3

Equació del pla que compleix: a) passa pel punt $A(3,0,0)$ i és paral·lel al *pla YZ, b) conté a la recta* $r:\left\{\dfrac{x}{2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z+1}{1}\right\}$ *i al punt* $P(2,1,0)$.

RAONAMENT

a) feix de plans paral·lels al pla YZ, $\Rightarrow \{x=?\}$ *per passar per A* $\boxed{x=3}$

b) 1.- recta $\left\{\dfrac{x}{2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z+1}{1}\right\} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2y+2=0 \\ x-2z-2=0 \end{cases}$, *el feix de plans que passen per la recta és,* $(x-2y+2)+t(x-2z-2)=0$ *menys el pla* $x-2z-2=0$, *el que passa per P compleix,*

$$\begin{cases} (x-2y+2)+t(x-2z-2)=0 \\ 2+t(0)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x-2z-2=0 \\ impossible \end{matrix} \Rightarrow \boxed{x-2z-2=0}$$

2.4

Equació del pla que compleix: a) que conté a les rectes $r:\left\{\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z}{-1}\right\}, s:\left\{\dfrac{x}{-4}=\dfrac{y}{-2}=\dfrac{z+1}{2}\right\}$ *b) que conté a la recta* $r:\begin{cases} x+y=0 \\ 2x-y+3z=1 \end{cases}$ *i és paral·lel al pla* $\pi:\{x-y+z=1\}$.

RAONAMENT

a)

recta r: $\begin{cases} A(1,2,0) \\ \vec{v}=(2,1,-1) \end{cases}$ *recta s:* $\begin{cases} B(0,0,-1) \\ \vec{w}=(-4,-2,2) \end{cases}$ $\overrightarrow{AB}=(-1,-2,-1)$

$$\begin{vmatrix} \overrightarrow{AB} \\ \vec{v} \\ \vec{w} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -4 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 0+0+0=0 \Rightarrow \text{ formen pla}$$

Vector director del pla $\vec{v}\wedge\vec{w}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & -1 \\ -4 & -2 & 2 \end{vmatrix}=(0,0,0)$ *això indica que* *les rectes r i s són paral·leles i el vector director del pla és,*

$$\vec{v} \wedge \overrightarrow{AB} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = (-3,3,-3) \approx (1,-1,1)$$

Equació del pla que passa per A, $\begin{cases} x - y + z + ? = 0 \\ 1 - 2 + 0 + ? = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{x - y + z + 1 = 0}$

b) feix de plans que passen per r, $x + y + t(2x - y + 3z - 1) = 0 \Rightarrow$
vector director: $\vec{v} = (2t + 1, 1 - t, 3t)$ *que és paral·lel al* $\vec{w} = (1,-1,1) \Rightarrow$

$$\frac{2t+1}{1} = \frac{1-t}{-1} = \frac{3t}{1} \Rightarrow \begin{cases} 2t + 1 = 3t \\ t - 1 = 3t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = -\dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \quad \boxed{\textit{impossible}}$$

2.5

Trobeu l'equació de la recta paral·lela a la recta t: $\left\{ \frac{x-1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{1} \right\}$ *que toca a les rectes: r {que passa per* $A(1,1,1)$*i*$B(1,3,-1)$*} i s:{ determinada per els plans 3x+4y–z+1=0 i x–y=0}.*

RAONAMENT

1-punt P genèric de r, $\begin{cases} \overrightarrow{AB} = (0,2,-2) \\ P = A + t\,\overrightarrow{AB} \end{cases} \Rightarrow P(1, 1 + 2t, 1 - 2t)$

2-punt genèric Q de s, $\begin{cases} y = x \\ z = 3x + 4y + 1 \end{cases} \Rightarrow Q(k, k, 7k + 1)$

3-el vector $\overrightarrow{PQ} = (k - 1, k - 2t - 1, 7k + 2t)$ *és paral·lel al vector director de t,* $\vec{v} = (1.2.1)$ *això implica,* $\dfrac{k-1}{1} = \dfrac{k - 2t - 1}{2} = \dfrac{7k + 2t}{1} \quad \Rightarrow$

$$\begin{cases} k-1=7k+2t \\ 2k-2=k-2t-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k=-\dfrac{4}{10} \\ t=\dfrac{7}{10} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P(1,\dfrac{12}{5},\dfrac{-2}{5}) \\ Q(\dfrac{-2}{5},\dfrac{-2}{5},\dfrac{-9}{5}) \end{cases} \Rightarrow$$

$$4\text{-recta} \begin{cases} P(1,\dfrac{12}{5},\dfrac{-2}{5}) \\ \vec{v}=(1,2,1) \end{cases} \Rightarrow \boxed{\left\{ \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-\frac{12}{5}}{2}=\dfrac{z+\frac{2}{5}}{1} \right\}}$$

2.6

Donada la recta $r:\left\{\dfrac{x-1}{1}=y=\dfrac{z+2}{-1}\right\}$ *i el pla* $\pi:\{x+y+z=0\}$ *determina:*

a) punt de tall entre la recta i el pla, b) els punts de la recta r que disten $\sqrt{3}$ *unitats del pla* π.

RAONAMENT

a) punt de tall P $\begin{cases} x+y+z=0 \\ y=x-1 \\ y=-z-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-2=0 \\ y=x-1 \\ z=-x-1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{P(2,1,-3)}$

b)1.- punt Q genèric de r

$$\left\{\frac{x-1}{1}=y=\frac{z+2}{-1}\right\} \Rightarrow \begin{cases} x=t+1 \\ y=t \\ z=-t-2 \end{cases} \Rightarrow \quad Q(t+1,t,-t-2)$$

2.- condició de distància

$$\pm\sqrt{3}=\frac{x+y+z}{\sqrt{3}} \Rightarrow \pm\sqrt{3}=\frac{t-1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \begin{cases} t=1+3=4 \\ t=1-3=-2 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} P_1(5,4,-6) \\ P_2(-1,-2,0) \end{cases}}$$

2.7

Donada la recta $r:\{x-z+1=0; x+y-z-1=0\}$ i el punt $P(0,1,1)$ trobeu: a) pla π que passa per P i és perpendicular a r, b) distància d del punt P a la recta r.

RAONAMENT

a)

1.-vector director de la recta r i del pla π, $\vec{v}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}=(1,0,1)$

2.-equació del pla $\begin{cases} x+z+?=0 \\ P(0,1,1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+z+?=0 \\ 0+1+?=0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\pi:\{x+z-1=0\}}$

b)

1.-punt Q de tall entre la recta r i el pla π, $Q\begin{cases} x-z+1=0 \\ x+y-z-1=0 \\ x+z-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=2 \\ z=1 \end{cases}$

2. $\begin{cases} P(0,1,1) \\ Q(0,2,1) \end{cases} \Rightarrow d=\left|\overrightarrow{PQ}\right|=\sqrt{0+1+0}=1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{d=1}$

2.8

Determineu l'equació k de la recta que passa pel punt $P(1,-1,0)$ i és perpendicular a les rectes: $r:\{x-y-3=0; x+y-2z=0\}$ i $s:\{x-y+z-3=0; y+z-1=0\}$.

RAONAMENT

1.-vector director de r, $\overrightarrow{w_1}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix}=(2,2,2)\approx(1,1,1)$

2.- vector director de s, $\overrightarrow{w_2}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{vmatrix}=(-2,-1,1)\approx(2,1,-1)$

3.-vector director de k, $\overrightarrow{w_1}\wedge\overrightarrow{w_2}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 1 & 1\\ 2 & 1 & -1\end{vmatrix}=(-2,3,-1)\approx(2,-3,1)$

4.-equació de la recta k, $\boxed{\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{-3}=\frac{z-0}{1}}$

2.9

Donats els plans $\pi_1:\{x+2y-z=4\}$ *i* $\pi_2:\{2x+4y+az=3\}$, *determineu el valor d'a per tal que:*

a) Els plans siguin paral·lels. *b) Els plans siguin perpendiculars.*

RAONAMENT

-vectors directors dels plans, $\overrightarrow{v_1}=(1,2,-1)$ i $\overrightarrow{v_2}=(2,4,a)$

a) vectors paral·lels implica, $\frac{2}{1}=\frac{4}{2}=\frac{a}{-1}\quad\Rightarrow\quad\boxed{a=-2}$

b)vectors perpendiculars implica, $\overrightarrow{v_1}\cdot\overrightarrow{v_2}=0\Rightarrow 2+8-a=0\quad\Rightarrow\quad\boxed{a=10}$

2.10

La recta r que té per vector director $\vec{v}=(-2,3,1)$ *i passa pel punt* $P(-1,5,2)$ *determina amb els plans* $\pi_1:\{x-y+z=0\}$ *i* $\pi_2:\{2x-y-z=7\}$ *un segment AB, determina els extrems A i B.*

RAONAMENT

1.-equació de la recta r, $\frac{x+1}{-2}=\frac{y-5}{3}=\frac{z-2}{1} \Rightarrow \begin{cases} 3x+2y=7 \\ x+2z=3 \end{cases}$

2.-determinació de A, $\begin{cases} 3x+2y=7 \\ x+2z=3 \\ x-y+z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=2 \\ z=1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{A(1,2,1)}$

3.-determinació de B, $\begin{cases} 3x+2y=7 \\ x+2z=3 \\ 2x-y-z=7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=-1 \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{B(3,-1,0)}$

2.11

Donat el pla π: $\{x+2y+3z-1=0\}$ determineu el valor d'a i b per tal que la recta r: $\left\{\frac{x}{2}=\frac{y-1}{a+1}=\frac{z+1}{2b}\right\}$ sigui perpendicular al pla π.

RAONAMENT

1-el vector director de la recta $\vec{v}=(2,a+1,2b)$ i el vector director del pla $\vec{w}=(1,2,3)$ són paral·lels això implica, $\frac{2}{1}=\frac{a+1}{2}=\frac{2b}{3} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} b=3 \\ a=3 \end{cases}}$

2.12

Equació del pla π_1 paral·lel al pla π_2 : $\{2x+3y-z+1=0\}$ que passa pel punt $A(1,0,-1)$.

RAONAMENT

1.feix de plans paral·lels a π_2 , $2x+3y-z+?=0$

2.per passar per A,

$\begin{cases} 2x+3y-z+?=0 \\ 2+0+1+?=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x+3y-z+?=0 \\ ?=-3 \end{cases} \Rightarrow \boxed{2x+3y-z-3=0}$

2.13

Trobeu l'equació del pla determinat per les rectes $r: \left\{ \frac{x}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{1} \right\}$ *i* $s: \left\{ \frac{x-2}{1} = \frac{y-6}{-1} = \frac{z-3}{2} \right\}$.

RAONAMENT

-dades de les rectes $r: \begin{cases} A(0,-1,2) \\ \vec{v_1} = (1,2,1) \end{cases}$ i $s: \begin{cases} B(2,6,3) \\ \vec{v_2} = (1,-1,2) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{AB} = (2,7,1)$

1.-posició relativa de r i s,

$rang\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = 2 \Rightarrow$ les rectes es tallen o es creuen

$\begin{vmatrix} 2 & 7 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 2(5) - 7(1) + 1(-3) = 0 \Rightarrow \quad rang\begin{pmatrix} \overrightarrow{AB} \\ \vec{v_1} \\ \vec{v_2} \end{pmatrix} = 2 \quad \Rightarrow$ les rectes són incidents i formen un pla.

2.- vector director del pla $\vec{w} = \vec{v_1} \wedge \vec{v_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = (5,-1,-3)$

3.-equació del pla,

$\begin{cases} 5x - y - 3z + ? = 0 \\ A(0,-1,2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5x - y - 3z + ? = 0 \\ 0 + 1 - 6 + ? = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad \boxed{5x - y - 3z + 5 = 0}$

2.14

Equació de la recta que passa pel punt $A(-1,1,2)$ *i és paral·lela a la recta* intersecció entre els plans: $\pi_1:\{x+y-2z+3=0\}$ i $\pi_2:\{2x-y+z+1=0\}$

RAONAMENT

1.-vector director de la recta $\vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 1 & -2\\ 2 & -1 & 1\end{vmatrix}=(-1,-5,-3)\approx(1,5,3)$

2.-equació de la recta $\begin{cases}\vec{v_1}=(1,5,3)\\ A(-1,1,2)\end{cases}\Rightarrow \boxed{\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y-1}{5}=\dfrac{z-2}{3}}$

2.15

Equació del pla que passa per l'origen de coordenades i és paral·lel a les rectes: $r:\left\{\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-3}{3}=\dfrac{z-1}{1}\right\}$ i $s:\left\{\dfrac{x}{0}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z}{-1}\right\}$.

RAONAMENT

1,-dades de les rectes $r:\begin{cases}A(1,3,1)\\ \vec{v_1}=(2,3,1)\end{cases}$ i $s:\begin{cases}B(0,1,0)\\ \vec{v_2}=(0,2,-1)\end{cases}$

2.-vector director del pla $\vec{w}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & 3 & 1\\ 0 & 2 & -1\end{vmatrix}=(-5,2,4)\approx(5,-2,-4)$

3.-equació del pla,

$\begin{cases}5x-2y-4z+?=0\\ O(0,0,0)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}5x-2y-4z+?=0\\ ?=0\end{cases}\Rightarrow \boxed{5x-2y-4z=0}$

2.16

Equació del pla que passa pel punt $A(1,1,0)$ i és paral·lel a les rectes $r:\{2x-y+z=0;x+y-z=2\}$ i $s:\{y+z=3;x-y-z=1\}$.

RAONAMENT

1,-vectors de les rectes

$$\vec{v_r}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & -1 & 1\\ 1 & 1 & -1\end{vmatrix}=(0,3,3)$$

2.-vector director del pla $\vec{w}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & 3 & 1\\ 0 & 2 & -1\end{vmatrix}=(-5,2,4)\approx(5,-2,-4)$

3.-equació del pla,

$$\begin{cases}5x-2y-4z+?=0\\ O(0,0,0)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}5x-2y-4z+?=0\\ ?=0\end{cases}\Rightarrow\boxed{5x-2y-4z=0}$$

2.17

Donats els punts $A(1,1,-1),B(0,1,1),C(-1,2,1),D(1,1,1)$, trobeu l'equació del pla que conté a la recta AB i és paral·lel a la recta CD.

RAONAMENT

1.-equació de la recta AB,

$$\begin{cases}A(1,1,-1)\\ \vec{AB}=(-1,0,2)\end{cases}\Rightarrow\left\{\frac{x-1}{-1}=\frac{y-1}{0}=\frac{z+1}{2}\right\}\Rightarrow\begin{cases}y-1=0\\ 2x+z-1=0\end{cases}$$

2.-feix de plans que contenen a la recta AB, $2x+z-1+t(y-1)=0$

3.-vector director del pla, $\vec{w}=(2,t,1)$ i vector $\vec{CD}=(2,-1,0)$

4.-condició de perpendicularitat del dos vectors,

$\vec{CD}\cdot\vec{w}=0\Rightarrow 4-t+0=0\Rightarrow t=4$

5.-equació del pla, $\begin{cases}2x+z-1+t(y-1)=0\\ t=4\end{cases}\Rightarrow\boxed{2x+4y+z-5=0}$

2.18

Determineu el valor dels paràmetres m i n de manera que els plans $\pi_1 : \{2x + my - 4z + 1 = 0\}$ *i* $\pi_2 : \{3x + 9y + nz - 3 = 0\}$ *siguin paral·lels.*

RAONAMENT

1.-vectors directors dels plans, $\vec{v_1} = (2, m, -4)$ *i* $\vec{v_2} = (3, 9, n)$

2.-paral·lelisme dels vectors, $\frac{3}{2} = \frac{9}{m} = \frac{n}{-4} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} m = 6 \\ n = -6 \end{cases}}$

2.19

Determineu el valor d'm per tal que els plans $\pi_1 : \{3x + my - z + 3 = 0\}$ *i* $\pi_2 : \{2x - y + mz - 1 = 0\}$ *siguin perpendiculars.*

RAONAMENT

1.-vectors directors dels plans, $\vec{v_1} = (3, m, -1)$ *i* $\vec{v_2} = (2, -1, m)$

2.-perpendicularitat dels vectors, $\vec{v_1} \cdot \vec{v_2} = 0 \Rightarrow 6 - m - m = 0 \Rightarrow \boxed{m = 3}$

2.20

Trobeu l'equació del pla en cada apartat que compleix: a) passa pel punt $A(2,0,3)$ *i és paral·lel al `pla* $\pi_1 : \{(x, y, z) = (0,1,3) + t(2,1,1) + s(-1,1,0)\}$ *b)passa pels punts* $B(1,1,0), C(3,1,4), D(0,2,-1)$, *c)passa pel punt* $P(2,1,2)$ *i és paral·lel al pla:* $\pi_2 : \{2x - 3y - z + 3 = 0\}$, *d) passa pels punts* $E(1,1,1), F(2,0,-1)$ *i és paral·lel a la recta* $r : \left\{\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+1}{3}\right\}$.

RAONAMENT

a) equació vectorial del pla $\boxed{\{(x, y, z) = (2,0,3) + t(2,1,1) + s(-1,1,0)\}}$

b) equació implícita del pla,

$$\begin{cases} \overrightarrow{BP} = (x-1, y-1, z) \\ \overrightarrow{BC} = (2,0,4) \\ \overrightarrow{BD} = (-1,1,-1) \end{cases} \Rightarrow \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z \\ 2 & 0 & 4 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$-4(x-1) - 2(y-1) + 2z = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{2x + y - z - 3 = 0}$$

c) equació del pla $\begin{cases} 2x - 3y - z + ? = 0 \\ P(2,1,2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - 3y - z + ? = 0 \\ 4 - 3 - 2 + ? = 0 \end{cases} \Rightarrow$

$$\boxed{2x - 3y - z + 1 = 0}$$

d) vectors continguts en el pla, $\begin{cases} \overrightarrow{EF} = (1,-1,-2) \\ \vec{v} = (2,1,3) \\ \overrightarrow{EP} = (x-1, y-1, z-1) \end{cases}$

equació del pla

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 1(x-1) + 7(y-1) - 3(z-1) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{x + 7y - 3z - 5 = 0}$$

2.21

Equació de la recta r que passa pel punt $A(2,0,2)$ *i és paral·lela a la recta s, intersecció entre els plans:* $\pi_1 : \{x + y - z = 0\}$ *i* $\pi_2 : \{2x + 2y - z = 1\}$.

RAONAMENT

1.-vectors directors dels plans, $\overrightarrow{w_1} = (1,1,-1)$ *i* $\overrightarrow{w_2} = (2,2,-1)$

2.-vector director de la recta, $\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix} = (1,-1,0)$

3.-equació de la recta r, $\begin{cases} A(2,0,2) \\ \vec{v} = (1,-1,0) \end{cases} \Rightarrow \boxed{\left\{ \frac{x-2}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z-2}{0} \right\}}$

2.22

Equació del pla π_1 *que passa pel punt* $A(2,1,1)$ *i és paral·lel al pla* π_2 *determinat per la següent condició:{(passa pel punt* $B(1,0,1)$ *i conté a la recta r, que passant pel punt* $C(2,2,2)$ *té per vector director* $\vec{v}=(1,-1,3)$*}.*

RAONAMENT

1.-vectors continguts en el pla π_1*,* $\begin{cases} \overrightarrow{AP}=(x-2,y-1,z-1) \\ \overrightarrow{BC}=(1,2,1) \\ \vec{v}=(1,-1,3) \end{cases}$

2.-equació del pla π_1*,*

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-1 & z-1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix}=0 \quad \Rightarrow \quad 7(x-2)-2(y-1)-3(z-1)=0$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{7x-2y-3z-9=0}$$

2.23

Equació del pla π_1 *que passa pel punt* $P(-1,0,2)$ *i és paral·lel a les rectes* $r:\{x=1+3t,y=t,z=-2-t\}$ *i* $s:\{x+y-3=0,2x-y+2z=1\}$*.*

RAONAMENT

1.-vector director de r, $\overrightarrow{v_1}=t(3,1,-1)\approx(3,1,-1)$

2.-vector director de s, $\overrightarrow{v_2}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix}=(2,-2,-3)$

3.-vector director de π_1, $\vec{w} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & -3 \end{vmatrix} = (-5,7,-8) \approx (5,-7,8)$

4.-equació del pla π_1, $\begin{cases} 5x - 7y + 8z + ? = 0 \\ -5 - 0 + 16 + ? = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{5x - 7y + 8z - 11 = 0}$

2.24

Trobeu el punt d'intersecció entre la recta $r : \{x = 2t, y = -1 + t, z = 1 + 3t\}$ *i el pla* $\pi : \{x - y + z + 2 = 0\}$.

RAONAMENT

1.- el punt genèric de la recta $P(2t, t-1, 1+3t)$ compleix l'equació del pla aleshores,

$(2t) - (t-1) + (1+3t) + 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad t = -1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{P(-2,-2,-2)}$

2.25

Donats els punts $A(1,0,-1)$ *i* $B(a,2,3)$ *determineu el valor d'a per tal que el pla* $\pi : \{2x - y + z = 3\}$ *sigui paral·lel a la recta* AB.

RAONAMENT

1.-vector director de la recta r, $\overrightarrow{AB} = (a-1, 2, 4)$

2.-vector director del pla $\vec{w} = (2,-1,1)$

3.-perpendicularitat dels vectors, $\overrightarrow{AB} \cdot \vec{w} = 0 \quad \Rightarrow \quad 2(a-1) - 2 + 4 = 0$

$\Rightarrow \quad \boxed{a = 0}$

2.26

Donat el punt $A(3,1,-1)$ i la recta $r:\left\{\frac{x-1}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z+1}{3}\right\}$ determineu el punt B que pertany a r, per tal que la recta AB sigui paral·lela al pla $\pi:\{3x-2y+z=4\}$.

RAONAMENT

1.-punt P genèric de la recta r, $P(1+t,2t,-1+3t)$

2.-vector del pla $\vec{w}=(3,-2,1)$ i vector $\overrightarrow{AP}=(t-2,2t-1,3t)$

3.-si P=B els vectors anteriors són perpendiculars aleshores

$\overrightarrow{AP}\cdot\vec{w}=0 \Rightarrow 3(t-2)-2(2t-1)+1(3t)=0 \Rightarrow t=2 \Rightarrow \boxed{P=B(3,4,5)}$

2.27

Trobeu l'equació del pla π_1 que passant pels punts $A(1,3,-1)$ i $B(4,2,-2)$ és perpendicular al pla $\pi_2:\{x+y-z+3=0\}$.

RAONAMENT

1.-vector director del pla π_2, $\vec{v}=(1,1,-1)$

2.-vectors continguts en el pla π_1, $\begin{cases}\overrightarrow{AP}=(x-1,y-3,z+1)\\ \overrightarrow{AB}=(3,-1,-1)\\ \vec{v}=(1,1,-1)\end{cases}$

3.-equació del pla π_1,

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-3 & z+1 \\ 3 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}=0 \quad\Rightarrow\quad 2(x-1)+2(y-3)+4(z+1)=0$$

$$\Rightarrow\quad 2x+2y+4z-4=0 \quad\Rightarrow\quad \boxed{x+y+2z-2=0}$$

2.28

Trobeu l'equació del pla π *que passant pel punt* $P(1,1,1)$ *és perpendicular als plans* $\pi_1 : \{x - y + z + 3 = 0\}$ *i* $\pi_2 : \{x + 2z = 1\}$.

RAONAMENT

1.-vector director de π, $\quad \vec{v} = \vec{v_1} \wedge \vec{v_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = (-2,-1,1) \approx (2,1,-1)$

2.-equació del pla π, $\begin{cases} 2x + y - z + ? = 0 \\ P(1,1,1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + y - z + ? = 0 \\ 2 + 1 - 1 + ? = 0 \end{cases} \Rightarrow$

$\begin{cases} 2x + y - z + ? = 0 \\ ? = -2 \end{cases} \Rightarrow \boxed{2x + y - z - 2 = 0}$

2.29

Trobeu l'equació del pla π *que passant pel punt* $A(1,1,2)$ *és perpendicular al pla* $\pi_1 : \{x + y - 2z = 3\}$ *i paral·lel a la recta* $r : \{x - 2y + z = 0, x = 1\}$.

RAONAMENT

1.-vector director de la recta r, $\quad \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (0,1,2)$

2.-vector director del pla π, $\quad \vec{w} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = (-4,2,-1) \approx (4,-2,1)$

3.-equació del pla π,

$\begin{cases} 4x - 2y + z + ? = 0 \\ A(1,1,2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x - 2y + z + ? = 0 \\ 4 - 2 + 2 + ? = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x - 2y + z + ? = 0 \\ ? = -4 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{4x - 2y + z - 4 = 0}$

2.30

Trobeu l'equació del pla π que passant pel punt $A(0,1,-2)$ té per vector director $\vec{w}=(1,-1,1)$.

RAONAMENT

1.-equació del pla π,

$$\begin{cases} x-y+z+?=0 \\ A(0,1,-2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-y+z+?=0 \\ 0-1-2+?=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-y+z+?=0 \\ ?=3 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{x-y+z+3=0}$$

2.31

Trobeu l'equació de la recta r que passant pel punt $A(1,3,-2)$ és perpendicular al pla $\pi:\{x+y-z=3\}$.

RAONAMENT

1.-vector director de la recta i del pla, $\vec{v}=(1,1,-1)$

2.-equació de la recta r, $\boxed{\left\{\frac{x-1}{1}=\frac{y-3}{1}=\frac{z+2}{-1}\right\}}$

2.32

Trobeu l'equació implícita de la recta r projecció de la recta $s:\{(x,y,z)=(0,1,-1)+t(1,0,2)\}$ sobre el pla $\pi:\{x-2y+z=0\}$.

RAONAMENT

1.-equació implícita de s, $\left\{t=\frac{x}{1}=\frac{y-1}{0}=\frac{z+1}{2}\right\} \Rightarrow \begin{cases} y-1=0 \\ 2x-z-1=0 \end{cases}$

2.-feix de plans que passen per s, $\{2x-z-1+\lambda(y-1)=0\}$

3.-condició de perpendicularitat dels dos plans,

$\overrightarrow{(1,-2,1)}\cdot\overrightarrow{(2,\lambda,-1)}=0 \Rightarrow 2-2\lambda-1=0 \Rightarrow \lambda=\frac{1}{2}$

4.-equació de la recta r,

$$\left.\begin{cases} x-2y+z=0 \\ 2x+\frac{1}{2}y-z-\frac{3}{2}=0 \end{cases}\right\} \Rightarrow \boxed{\{x-2y+z=0,4x+y-2z-3=0\}}$$

2.33

Si $A(1,-1,0)$ i $B(0,1,0)$ trobeu l'equació del pla que passa per A i és perpendicular al segment AB.

RAONAMENT

1.-vector director del pla $\overrightarrow{AB}=(-1,2,0)\approx(1,-2,0)$

2.-equació del pla,

$$\begin{cases} x-2y+?=0 \\ A(1,-1,0) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-2y+?=0 \\ 1+2+?=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-2y+?=0 \\ ?=-3 \end{cases} \Rightarrow \boxed{x-2y-3=0}$$

2.34

Equació de la recta s que passat pel punt $A(3,2,1)$ és perpendicular i secant a la recta $r:\left\{\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z}{-1}\right\}$.

RAONAMENT

1.-punt P genèric de $r:\left\{\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z}{-1}=t\right\} \Rightarrow P(1+t,1-t,-t)$

2.-vector director de la recta s, $\overrightarrow{AP}=(t-2,-t-1,-t-1)$

3.-perpendicularitat dels vectors $\vec{v}=(1,-1,-1)$ i $\overrightarrow{AP}=(t-2,-t-1,-t-1)$,

$\vec{v}\cdot\overrightarrow{AP}=0 \Rightarrow t-2+t+1+t+1=0 \Rightarrow 3t=0 \Rightarrow t=0 \;\Rightarrow\; B=P(0)=(1,1,0)$

4.-equació de la recta s,

$$\begin{cases} A(3,2,1) \\ \overrightarrow{AB}=(-2,-1,-1)\approx(2,1,1) \end{cases} \quad\Rightarrow\quad \boxed{\frac{x-3}{2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-1}{1}}$$

2.35

Equació del pla π_1 *que conté a la recta* $r:\left\{\frac{x-1}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z-2}{-1}\right\}$ *i és perpendicular al pla* $\pi_2:\{2x-y+2=0\}$.

RAONAMENT

1.-equació implícita de r, $\{x-2y-1=0, y+z-2=0\}$

2.-feix de plans que passen per r,

$x-2y-1+t(y+z-2)=0 \Leftrightarrow x+(t-2)y+tz+(-1-2t)=0$

3.-condició de perpendicularitat entre els dos plans,

$\overrightarrow{(2,-1,0)}\cdot\overrightarrow{(1,t-2,t)}=0 \Rightarrow 2-t+2+0=0 \Rightarrow t=4$

4.-equació del pla π_1, $\boxed{x+2y+4z-9=0}$

2.36

Equació de la recta r paral·lela a la recta $k:\left\{\frac{x}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z}{-1}\right\}$ *secant a les rectes AB i s, on :* $A(1,1,1), B(1,5,3)$ *i* $s:\{x+z=1, 3x-y=3\}$.

RAONAMENT

1.-punt genèric P de la recta AB, $P=A+t\cdot\overrightarrow{AB}=(1,1+4t,1+2t)$

2.-punt genèric Q de la recta s, $\begin{cases} y=3x-3 \\ z=1-x \end{cases} \Rightarrow Q(k,3k-3,1-k)$

3.-el vector director de la recta k, $\vec{v}=(1,2,-1)$ i el vector $\overrightarrow{PQ}$ són paral·lels aleshores,

$$\begin{cases}\vec{v}=(1,2,-1)\\ \overrightarrow{PQ}=(k-1,3k-4t-4,-k-2t)\end{cases}\Rightarrow\frac{k-1}{1}=\frac{3k-4t-4}{2}=\frac{-k-2t}{-1}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}2t=-1\\ k-4t-2=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}t=-\dfrac{1}{2}\\ k=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}P(1,-1,0)\\ Q(0,-3,1)\end{cases}$$

4.-equació de la recta PQ, $\begin{cases}P(1,-1,0)\\ \vec{v}=(1,2,-1)\end{cases}\Rightarrow\boxed{\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z}{-1}}$

2.37

Equació de la recta r perpendicular al pla $\pi:\{x+2y-z+1=0\}$ que passa pel punt $P(0,1,0)$.

RAONAMENT

1.-vector director de la recta $\bar{v}=(1,2,-1)$

2.-equació de la recta r, $\begin{cases}\bar{v}=(1,2,-1)\\ P(0,1,0)\end{cases}\Rightarrow\boxed{\dfrac{x-0}{1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-0}{-1}}$

2.38

Trobeu la recta t perpendicular i secant a les rectes $r:\left\{\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{0}=\dfrac{z}{-1}\right\}$ i $s:\{x=0,z+1=0\}$.

RAONAMENT

1.-punt genèric P de $r:\left\{\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{0}=\dfrac{z}{-1}=t\right\}$ $P=(1+t,1,1-t)$

2.-punt genèric Q de la recta s, $\begin{cases} x=0 \\ z=-1 \end{cases} \Rightarrow \quad Q(0,k,-1)$

3.-vectors directors de les rectes

$$\vec{v}_r=(1,0,-1) \qquad \vec{v}_s=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=(0,-1,0) \qquad \overrightarrow{PQ}=(-t-1,k-1,t-2)$$

4.-el vectors directors de les rectes r i s són perpendiculars al vector $\overrightarrow{PQ}$ aleshores,

$$\begin{cases} \overrightarrow{PQ}\cdot\vec{v}_r=0 \\ \overrightarrow{PQ}\cdot\vec{v}_s=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -t-1-t+2=0 \\ k-1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t=\frac{1}{2} \\ k=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P(\frac{3}{2},1,\frac{1}{2}) \\ Q(0,1,-1) \end{cases}$$

5.-recta PQ, $\begin{cases} Q(0,1,-1) \\ \overrightarrow{PQ}=(-\frac{3}{2},0,-\frac{3}{2})\approx(1,0,1) \end{cases} \Rightarrow \boxed{\frac{x}{1}=\frac{y-1}{0}=\frac{z+1}{1}}$

2.39

a)equació del pla perpendicular a la recta $r:\{x=t+1, y=2-t, z=0\}$ que passa pel punt $A(0,1,2)$ b) estudieu la posició de r, respecte de l'eix OZ.

RAONAMENT

a)

1.-vector direccional de la recta r i del pla, $\vec{v}=(1,-1,0)$

2.-equació del pla,

$$\begin{cases} x-y+?=0 \\ A(0,1,2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-y+?=0 \\ 0-1+?=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-y+?=0 \\ ?=1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{x-y+1=0}$$

b)

recta r, $\begin{cases} P(1,2,0) \\ \vec{v}=(1,-1,0) \end{cases}$ eix OZ, $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Q(0,0,0) \\ \vec{w}=(0,0,1) \end{cases} \quad \overrightarrow{QP}=(1,2,0)$

$$\begin{vmatrix} \overrightarrow{QP} \\ \vec{v} \\ \vec{w} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \Rightarrow rang\begin{pmatrix} \overrightarrow{QP} \\ \vec{v} \\ \vec{w} \end{pmatrix} = rang\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 3$$

$\boxed{les\ rectes\ es\ creuen}$

2.40

Equació del pla que passa pel punt $A(1,1,1)$ *i és paral·lel als vectors* $\vec{u}(1,0,1)$ *i* $\vec{v}=(2,1,-1)$.

RAONAMENT

1.-vector genèric del pla $\overrightarrow{AP}=(x-1,y-1,z-1)$

2.-equació del pla,

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -1(x-1)+3(y-1)+1(z-1)=0 \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{x-3y-z+3=0}$$

2.41

Equació del pla π_1 *paral·lel al pla* $\pi_2 : \{x+2y-3z=0\}$ *que passa pel punt* $A(-1,2,0)$.

RAONAMENT

1.-equació del pla π_1,

$$\begin{cases} x+2y-3z+?=0 \\ A(-1,2,0) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+2y-3z+?=0 \\ -1+4+0+?=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+2y-3z+?=0 \\ ?=-3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{x+2y-3z-3=0}$$

2.42

Donats els punts $A(1,2,3)$ *i* $B(3,m,1)$ *trobeu el valor d'm per tal que la recta AB sigui: a) paral·lela al pla* $\pi:\{x+y-z+1=0\}$, *b) perpendicular al pla* $\pi:\{x+y-z+1=0\}$.

RAONAMENT

- vector director del pla, $\vec{w}=(1,1,-1)$ *i vector* $\overrightarrow{AB}=(2,m-2,-2)$

a) condició de perpendicularitat dels vectors,

$$\vec{w}\cdot\overrightarrow{AB}=0 \Rightarrow 2+m-2+2=0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{m=-2}$$

b) condició de paral·lelisme dels vectors,

$$\frac{2}{1}=\frac{m-2}{1}=\frac{-2}{-1} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases}-2=-2\\ m=4\end{cases} \text{ sistema compatible} \quad \boxed{m=4}$$

2.43

Donada la recta $r:\{2x-y+1=0, x+y-3z=-1\}$ *a) trobeu el valor de t per tal que el pla* $:\pi:\{tx+2y+z=k\}$ *sigui paral·lel a r, b) trobeu el valor de k per tal que la recta r quedi continguda en el pla* π.

RAONAMENT

-vector director de r, $\vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & -1 & 0\\ 1 & 1 & -3\end{vmatrix}=(3,6,3)\approx(1,2,1)$

-vector director del pla, $\vec{w}=(t,2,1)$

a) els vectors són perpendiculars, $\vec{v}\cdot\vec{w}=0 \Rightarrow t+4+1=0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{t=-5}$

b) discussió del sistema $\begin{cases}2x-y=-1\\ x+y-3z=-1\\ tx+2y+z=k\end{cases}$

$$A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 0\\ 1 & 1 & -3\\ t & 2 & 1\end{pmatrix} \qquad \overline{A}=\begin{pmatrix}2 & -1 & 0 & -1\\ 1 & 1 & -3 & -1\\ t & 2 & 1 & k\end{pmatrix}$$ *la recta està continguda en el pla si* $rang A = rang\,\overline{A} = 2$ *això implica,*

$$|A|=\begin{vmatrix}2 & -1 & 0\\ 1 & 1 & -3\\ t & 2 & 1\end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow 3t+12+3=0 \Leftrightarrow t=-5 \quad \text{i també,}$$

$$\begin{vmatrix}-1 & 0 & -1\\ 1 & -3 & -1\\ 2 & 1 & k\end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow -6-2+3k=0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{k=\frac{8}{3}}$$

2.44

Donats els punts $A(1,1,-1), B(1,2,3), C(0,5,-1)$ *trobeu l'equació de la recta que passa per C i és paral·lela a la recta que passa per A i B.*

RAONAMENT

1. vector director de la recta $\overrightarrow{AB}=(0,1,4)$

2.-equació de la recta, $\begin{cases} C(0,5,-1) \\ \overrightarrow{AB}=(0,1,4) \end{cases} \Rightarrow \boxed{\frac{x}{0}=\frac{y-5}{1}=\frac{z+1}{4}}$

2.45

Equació de la recta que passa pel punt $P(0,1,2)$ *i toca a les rectes*

$r:\left\{\frac{x}{2}=\frac{y-3}{1}=\frac{z-1}{2}\right\}$ *i* $s:\{2x+y-z=0, x-y+3z=2\}$.

RAONAMENT

1.-pla π_1 *que passa per P i conté a la recta r,*

$$r:\left\{\frac{x}{2}=\frac{y-3}{1}=\frac{z-1}{2}\right\}\Leftrightarrow\begin{cases}x-2y+6=0\\x-z+1=0\end{cases}$$

Feix de plans que passen per r, $x-2y+6+t(x-z+1)=0$

Equació del pla π_1,

$$\begin{cases}(1+t)x-2y-tz+(6+t)=0\\0-2-2t+6+t=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\pi_1:\{5x-2y-4z+10=0\}\\t=4\end{cases}$$

2.- pla π_2 *que passa per P i conté a la recta s,*

$s:\{2x+y-z=0,x-y+3z-2=0\}$

Feix de plans que passen per s, $\{2x+y-z+t(x-y+3z-2)=0\}$

Equació del pla π_2,

$$\begin{cases}(2+t)x+(1-t)y+3tz-2t=0\\0+1-t+6t-2t=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\pi_2:\{5x+4y-3z+2=0\}\\t=-\dfrac{1}{3}\end{cases}$$

3.-la recta és la intersecció dels plans π_1 *i* π_2,

$$\boxed{\{5x-2y-4z+10=0,5x+4y-3z+2=0\}}$$

2.46

Equació de la recta r que passa pel punt $A(1,0,1)$ *i és paral·lela al pla* $\pi_1:\{2x+y-z=0\}$ *i toca a la recta:* $s:\{x+y-z=1,2y-z=2\}$.

RAONAMENT

1.-punt genèric de la recta $s:\{x+y-z=1,2y-z=2\}.\Rightarrow P(t-1,t,2t-2)$

2.-el vector $\overrightarrow{AP}=(t-2,t,2t-3)$ *és perpendicular a* $\vec{w}=(2,1,-1)$

aleshores $\Rightarrow$ $2t-4+t-2t+3=0$ $\Rightarrow$ $t=1$ $\Rightarrow$ $P(0,1,0)$

3.- equació de la recta AP=r,

$$\begin{cases}A(1,0,1)\\\overrightarrow{AP}=(-1,1,-1)\approx(1,-1,1)\end{cases}\Rightarrow\boxed{\frac{x-1}{1}=\frac{y}{-1}=\frac{z-1}{1}}$$

2.47

Donats els plans $\pi_1 : \{x + 2y - z = 0\}$ *i* $\pi_2 : \{x + y - 3 = 0\}$ *trobeu l'equació de la recta r que passa per* $P(1,0,-1)$ *i és paral·lela als dos plans.*

RAONAMENT

1.-vector director de la recta r, $\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (1,-1,-1)$

2.-equació de la recta r, $\boxed{\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y}{-1} = \dfrac{z+1}{-1}}$

2.48

Trobeu els valors d'a i b per tal que els plans $\pi_1 : \{2x + ay + z - 1 = 0\}$ *i* $\pi_2 : \{bx - 6y + 2z = 0\}$ *siguin paral·lels.*

RAONAMENT

1.-vectors directors dels plans, $\vec{v_1} = (2,a,1)$ *i* $\vec{v_2} = (b,-6,2)$

2.-condició de paral·lelisme dels vectors, $\dfrac{b}{2} = \dfrac{-6}{a} = \dfrac{2}{1} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} a = -3 \\ b = 4 \end{cases}}$

2.49

Equació de la recta q paral·lela a la recta $r : \{2x + y = 0, 4x - z = 0\}$ *que és secant amb les rectes* $s : \{x + y = 2, 2x - y - z = 0\}$ *i* $t : \left\{\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z-1}{1}\right\}$.

RAONAMENT

1.- vector director de la recta r, $\vec{v}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & -1 \end{vmatrix}=(-1,2,-4)\approx(1,-2,4)$

2.- punt P genèric de la recta $s:\{x+y=2,2x-y-z=0\}\Rightarrow\begin{cases} y=2-x \\ z=3x-2 \end{cases}$

$\Rightarrow \quad P(a,2-a,3a-2)$

3.- punt Q genèric de la recta $t:\left\{\frac{x-1}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z-1}{1}=b\right\} \quad \Rightarrow$

$\Rightarrow \quad Q(b+1,2b,b+1)$

4.- condició de paral·lelisme entre $\overrightarrow{PQ}(b-a+1,a+2b-2,b-3a+3)$ i $\vec{v}$,

$\frac{b+1-a}{-1}=\frac{2b+a-2}{2}=\frac{b-3a+3}{-4} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} a=4 \\ b=1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} P(4,-2,10) \\ Q(2,2,2) \end{cases}$

5.- equació de la recta q, $\boxed{\frac{x-2}{-1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-2}{-4}}$

2.50

Trobeu el valor d'a per tal que les dues rectes $r:\left\{\frac{x}{3}=\frac{y-1}{2}=\frac{z}{1}\right\}$ i $s:\{x=1-at,y=2+t,z=3-2t\}$ siguin perpendiculars.

RAONAMENT

1.- vectors directors de les dues rectes, $\vec{v_r}=(3,2,1) \quad \vec{v_s}=(-a,1,-2)$

.2- condició de perpendicularitat, $\vec{v_r}\cdot\vec{v_s}=0\Rightarrow -3a+2-2=0\Rightarrow \boxed{a=0}$

2.51

Trobeu el valor d'a per tal que el plans $\pi_1:\{x+ay-z-1=0\}$ i

$\pi_2 : \{-x+2y+z-3=0\}$ *siguin : a) paral·lels, b) perpendiculars.*

RAONAMENT

1.- vectors directors dels dos plans, $\overrightarrow{w_1}=(1,a,-1)$ *i* $\overrightarrow{w_2}=(-1,2,1)$

a) condició de paral·lelisme, $\dfrac{-1}{1}=\dfrac{2}{a}=\dfrac{1}{-1} \Rightarrow \begin{cases} 1=1 \\ a=-2 \end{cases} \Rightarrow \boxed{a=-2}$

b) condició de perpendicularitat, $\overrightarrow{w_1}\cdot\overrightarrow{w_2}=0 \Rightarrow -1+2a-1=0 \Rightarrow \boxed{a=1}$

2.52

Trobeu el valor d'a per tal que la recta $r : \left\{\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{a}=\dfrac{z-1}{4}\right\}$ *i el pla* $\pi : \{x+3y+bz=1\}$ *siguin perpendiculars.*

RAONAMENT

1.- vectors directors de la recta i el pla, $\overrightarrow{v_r}=(2,a,4)$ *i* $\overrightarrow{w}=(1,3,b)$

2.- condició de perpendicularitat, $\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{a}=\dfrac{b}{4} \Rightarrow \begin{cases} a=6 \\ 2b=4 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} a=6 \\ b=2 \end{cases}}$

3. ANGLES I DISTÀNCIES

3.1

Trobeu l'equació del pla que talla als tres eixos de coordenades a una distància 2 unitats de l'origen.

RAONAMENT

1.- passa pels punts $A(2,0,0), B(0,2,0), C(0,0,2)$ i té per vector director $\vec{v} = (1,1,1)$.

2.- equació del pla

$$\begin{cases} x+y+z+? = 0 \\ A(2,0,0) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y+z+? = 0 \\ ? = -2 \end{cases} \Rightarrow \boxed{x+y+x-2=0}$$

3.2

Les rectes $r: \{x-y+1=0, x-y+z=0\}$ *i* $s: \{x-2y+9=0, x+z+1=0\}$ *es creuen, trobeu: a) la recta t perpendicular i secant a les dues rectes, b) la distància entre les dues rectes.*

RAONAMENT

1.- vectors directors de les rectes r i s,

$$\vec{v_r} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (-1,-1,0) \qquad \vec{v_s} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-2,-1,2)$$

2.- punt genèric P de r,

$$r: \{x-y+1=0, x-y+z=0\} \Rightarrow P(a, a+1, 1)$$

3.- punt genèric Q de s,

$$s: \{x-2y+9=0, x+z+1=0\} \Rightarrow Q(2b-9, b, 8-2b)$$

4.- perpendicularitat del vector $\overrightarrow{PQ} = (2b-a-9, b-a-1, 7-2b)$ amb $\vec{v_r}$ i $\vec{v_s}$,

$$\begin{cases} -2b+a+9-b+a+1=0 \\ -4b+2a+18-b+a+1+14-4b=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a-3b=-10 \\ 3a-9b=-33 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=4 \end{cases}$$

$\Rightarrow \begin{cases} P(1,2,1) \\ Q(-1,4,0) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{PQ} = (-2,2,-1) \approx (2,-2,1)$

a)equació de la recta PQ, $\boxed{\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-2}{-2} = \dfrac{z-1}{1}}$

b)distància entre P i Q, $\boxed{d = \sqrt{4+4+1} = 3}$

3.3

Trobeu l'angle β que forma la recta $r:\left\{\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z+3}{1}\right\}$ i el pla $\pi:\{3x+4y+5=0\}$.

RAONAMENT

1.- vectors direccionals de la recta i del pla, $\vec{v} = (2,2,1)$ i $\vec{w} = (3,4,0)$

2.- angle α entre els vectors, $\cos\alpha = \dfrac{|6+8+0|}{3\cdot 5} = \dfrac{14}{15} \Rightarrow \alpha = 0'93^o$

3.- angle entre recta i pla, $\beta = 90^o - \alpha \Rightarrow \boxed{\beta = 89'07^o}$

3.4

Trobeu la distància entre el punt $A(1,2,1)$ i el pla $\pi:\{x+2y-2z+3=0\}$.

RAONAMENT

1.- distància, $d = \dfrac{|1+4-2+3|}{\sqrt{1+4+4}} \Rightarrow \boxed{d=2}$

3.5

Trobeu la distància entre els plans: $\pi_1 : \{2x + y - 2z - 1 = 0\}$ i $\pi_2 : \{4x + 2y - 4z + 4 = 0\}$.

RAONAMENT

1.- vectors directors dels dos plans, $\vec{v_1} = (2,1,-2)$ i $\vec{v_2} = (4,2,-4)$

2.- posició relativa dels dos plans, $rang\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 4 & 2 & -4 \end{pmatrix} = 1 \quad \Rightarrow$ els plans són paral·lels.

3.- punt P de π_1, $\begin{cases} 2x + y - 2z - 1 = 0 \\ x = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow P(0,1,0)$

4.- distància de P a π_2, $d = \dfrac{|0 + 2 - 0 + 4|}{\sqrt{4 + 1 + 4}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{d = 2}$

3.6

Trobeu la distància entre la recta $r : \left\{ \dfrac{x-1}{-4} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z-1}{3} \right\}$ i el pla $\pi : \{x = -4t + 4s, y = -2 + t, z = 3 + 3t - 3s\}$.

RAONAMENT

1.- vector director del pla, $\vec{w} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -4 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & -3 \end{vmatrix} = (-3,0,-4) \approx (3,0,4)$

2.- vector director de la recta, $\vec{v} = (-4,1,3)$

3.- posició relativa de recta i pla, $\vec{v} \cdot \vec{w} = -12 + 0 + 12 = 0 \Rightarrow$ la recta és paral·lela al pla.

5.- equació del pla, $\begin{cases} 3x + 4z + ? = 0 \\ A(0,-2,3) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x + 4z + ? = 0 \\ ? = -12 \end{cases} \Rightarrow 3x + 4z - 12 = 0$

6.- distància entre recta i pla, $\begin{cases} P(1,1,1)\in r \\ 3x+4z-12=0 \end{cases} \Rightarrow d=\dfrac{|3+4-12|}{\sqrt{9+16}}$

$\Rightarrow \quad \boxed{d=1}$

3.7

Trobeu la distància entre les rectes r i s en els següents casos:

a) $r:\left\{\dfrac{x}{2}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z+1}{0}\right\}$ $\qquad s:\left\{\dfrac{x+1}{-4}=\dfrac{y-9}{2}=\dfrac{z-1}{0}\right\}$

b) $r:\{x=2t, y=-1, z=-1-3t\}$ $\qquad s:\{x=3+2t, y=7-t, z=1\}$

RAONAMENT

a)

1.- els vectors direccionals de les dues rectes són proporcionals aleshores les rectes són paral·leles,

2.- punt genèric de la recta $s:\left\{\dfrac{x+1}{-4}=\dfrac{y-9}{2}=\dfrac{z-1}{0}=t\right\}$ $Q(-1-4t,9+2t,1)$

3.- punt $P(0,1,-1)$ de la recta r, vector $\overrightarrow{PQ}=(-1-4t,8+2t,2)$ perpendicular a s, $\Rightarrow \quad -4(-1-4t)+2(8+2t)+0=0 \Rightarrow 20t+20=0$

$\Rightarrow \quad t=-1 \Rightarrow \begin{cases} P(0,1,-1) \\ Q(3,7,1) \end{cases} \quad \overrightarrow{PQ}=(3,6,2)$

4.- distància entre les rectes, $d(PQ)=\left|\overrightarrow{PQ}\right|=\sqrt{9+36+4} \quad \Rightarrow \quad \boxed{d=7}$

b)

1.- vectors direccionals de les rectes r i s, $\vec{v}_r=(2,0,-3)$ i $\vec{v}_s=(2,-1,0)$ les rectes es creuen,

2.- punts genèrics de les dues rectes, $\begin{cases} P(2t,-1,-1-3t) \\ Q(3+2k,7-k,1) \end{cases} \Rightarrow$

$\overrightarrow{PQ}=(2k-2t+3,8-k,2+3t)$

3.- condició de perpendicularitat,

$$\begin{cases} \overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{v_r}=0 \\ \overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{v_s}=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2(2k-2t+3)-3(2+3t)=0 \\ 2(2k-2t+3)-(8-k)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4k-13t=0 \\ 5k-4t=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t=\dfrac{-8}{49} \\ k=\dfrac{26}{49} \end{cases}$$

$$\overrightarrow{PQ}=\left(\frac{215}{49},\frac{392}{49},\frac{64}{49}\right) \qquad \boxed{d(PQ)=\frac{\sqrt{203.985}}{49}}$$

3.8

Donada la recta $r:\left\{\dfrac{x}{2}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z+3}{1}\right\}$ *i el pla* $\pi:\{x+y=5\}$ *trobeu l'angle que formen i el seu punt P d'intersecció.*

RAONAMENT

a)

1.- vectors directors de recta i pla, $\vec{v}=(2,1,1)$ *i* $\vec{w}=(1,1,0)$

angle entre els vectors, $\alpha=\cos^{-1}\dfrac{\left|\vec{v}\cdot\vec{w}\right|}{\sqrt{4+1+1}\cdot\sqrt{1+1+0}}=\cos^{-1}\dfrac{3}{2\sqrt{3}}=60^o$

2.- angle entre recta i pla, $\beta=90^o-30^o$ $\boxed{\beta=30^o}$

b)

1.- punt genèric de la recta r, $P(2t,t+2,t-3)$

2.- punt d'intersecció, $\begin{cases} P(2t,t+2,t-3) \\ x+y=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P(2,3,-2) \\ t=1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{P(2,3,-2)}$

3.9

Calculeu l'angle que formen els plans $\pi_1:\{x-3y+4z-1=0\}$ *i* $\pi_2:\{2x+2y+z-3=0\}$.

RAONAMENT

1.- vectors direccionals dels plans, $\overrightarrow{w_1}=(1,-3,4)$ i $\overrightarrow{w_2}=(2,2,1)$

2.- angle entre els dos vectors, $\alpha=\cos^{-1}\dfrac{|2-6+4|}{\sqrt{26}\cdot\sqrt{9}}=\cos^{-1}0 \Rightarrow \boxed{\alpha=90^o}$

3.10

Calcula la projecció ortogonal del punt $P(0,-1,-1)$ sobre el pla $\pi:\{x+3y+2z=9\}$.

RAONAMENT

1.- recta r perpendicular al pla que passa per P, $\dfrac{x-0}{1}=\dfrac{y+1}{3}=\dfrac{z+1}{2}$

2.- punt genèric de r, $Q(t,-1+3t,-1+2t)$

3.- punt A intersecció de recta i pla,

$$\begin{cases} Q(t,-1+3t,-1+2t) \\ x+3y+2z=9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Q(t,-1+3t,-1+2t) \\ 14t-5=9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Q=A(1,2,1) \\ t=1 \end{cases} \quad \boxed{A(1,2,1)}$$

3.11

Donada la recta $r:\{(x,y,z)=(t,1+2t,-2+2t)\}$ trobeu la distància del punt $A(0,0,1)$ a la recta.

RAONAMENT

1.- punt genèric de r, $P(t,1+2t,-2+2t)$ $\overrightarrow{AP}=(t,1+2t,-3+2t)$

2.- el vector director de r, $\vec{v}=(1,2,2)$ és perpendicular al vector $\overrightarrow{AP}$,

$$\Rightarrow t+2+4t-4+4t=0 \Rightarrow t=\frac{2}{9} \Rightarrow \overrightarrow{AP}=(\frac{2}{9},\frac{13}{9},\frac{-23}{9}) \Rightarrow \boxed{\left|\overrightarrow{AP}\right|=\frac{\sqrt{78}}{3}}$$

3.12

Donats els punts $P(0,1,0), Q(0,3,0), R(1,1,2) i S(1,-1,2)$ *es demana: a) comproveu que estan continguts en un mateix pla. b) comproveu que PQRS formen un paral·lelogram no rectangle. c) calculeu l'àrea de PQRS.*

RAONAMENT

a)

pla que passa per P Q R :

$$\begin{vmatrix} x & y-1 & z \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad 4x - 2z = 0 \quad \Rightarrow \quad \pi : \{2x - z = 0\}$$

$$\text{distància de } S \text{ al pla } \pi, \quad d = \frac{|2-2|}{\sqrt{5}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{PQRS \text{ són coplanaris}}$$

b)

1.- $\overrightarrow{PQ} = (0,2,0),\ \overrightarrow{QR} = (1,-2,2),\ \overrightarrow{RS} = (0,-2,0),\ \overrightarrow{SP} = (-1,2,-2).$

2.- $\overrightarrow{PQ}$ *i* $\overrightarrow{RS}$ *paral·lels i* $\overrightarrow{QR}$ *i* $\overrightarrow{SP}$ *paral·lels*

3.- $\vec{\alpha} = cos^{-1}\dfrac{\left|\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{QR}\right|}{\sqrt{4}\cdot\sqrt{9}} = cos^{-1}\dfrac{4}{6} \neq 90^o$ $\boxed{\text{formen paral·lelogram}}$

c) $$\overrightarrow{PQ} \wedge \overrightarrow{PS} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix} = (4,0,-2) \qquad \text{àrea} = \left|\overrightarrow{PQ} \wedge \overrightarrow{PS}\right| = \sqrt{20}$$

$$\text{àrea } PQRS = \boxed{2\sqrt{5}}\ u^2$$

3.13

Trobeu la distància entre el punt $P(2,0,3)$ *i la recta r intersecció dels plans* $\pi_1 : \{x + z - 1 = 0\}$ *i* $\pi_2 : \{x + 2y + z = 3\}$.

RAONAMENT

1.- punt genèric de la recta r, $Q\begin{cases} z=1-x \\ z=3-x-2y \end{cases} \Rightarrow Q(t,1,1-t)$

2.- vector director de la recta r, $\vec{v}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}=(-2,0,2)$

3.- el vector $\overrightarrow{PQ}=(t-2,1,-2-t)$ és perpendicular a $\vec{v}=(-2,0,2)$ això implica, $\begin{cases} Q(t,1,1-t) \\ -2t+4+0-4-2t=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Q(0,1,1) \\ t=0 \end{cases}$

4.- distància $d=\left|\overrightarrow{PQ}\right|=\sqrt{4+1+4}=3 \quad \Rightarrow \quad \boxed{d=3}$

3.14

Trobeu l'angle que forma el pla $\pi:\{3x+y-2z+7=0\}$ amb la recta $r:\{x-2y-8=0, x+z+8=0\}$.

RAONAMENT

1.- vectors directors de recta i pla,

$$\vec{v}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}=(-2,-1,2) \quad i \quad \vec{w}=(3,1,-2)$$

2.- angle entre els vectors, $\alpha=cos^{-1}\frac{|-6-1-4|}{3\cdot\sqrt{14}}=11'5^o$

3.- angle entre recta i pla, $\beta=90-\alpha=90^o-11'5^o \quad \boxed{\beta=88'5^o}$

3.15

Trobeu el punt simètric de $Q(0,1,1)$ respecte del pla π que passa pels *punts:* $A(2,1,1), B(0,2,-1) i C(1,-3,0)$.

RAONAMENT

1.- equació del pla π, si P és punt genèric del pla,

$$\begin{cases} \overrightarrow{AP} = (x-2, y-1, z-1) \\ \overrightarrow{AB} = (-2,1,-2) \\ \overrightarrow{AC} = (-1,-4,-1) \end{cases} , \quad \begin{vmatrix} x-2 & y-1 & z-1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x - z - 1 = 0$$

2.- recta r perpendicular al pla que passa per Q, $\frac{x}{1} = \frac{y-1}{0} = \frac{z-1}{-1}$

3.- punt M intersecció de recta i pla $M \begin{cases} x - z = 1 \\ y = 1 \\ x + z = 1 \end{cases} \Rightarrow M(1,1,0)$

4.- punt simètric Q',

$Q' = 2M - Q = (2,2,0) - (0,1,1) = (2,1,-1) \quad \Rightarrow \quad \boxed{Q'(2,1,-1)}$

3.16

Donada la recta $r : \left\{ \frac{x-1}{0} = \frac{y+1}{1} = \frac{z+4}{2} \right\}$ i el punt $P(1,2,2)$ trobeu el punt P' simètric de P respecte de la recta r.

RAONAMENT

1.- punt genèric de la recta $Q(1, t-1, 2t-4)$, $\overrightarrow{PQ} = (0, t-3, 2t-6)$

vector director de la recta $\vec{v} = (0,1,2)$

2.- condició de perpendicularitat entre $\vec{v} = (0,1,2)$ i $\overrightarrow{PQ} = (0, t-3, 2t-6)$

$\Rightarrow 0 + t - 3 + 4t - 12 = 0 \Rightarrow 5t = 15 \Rightarrow t = 3 \Rightarrow \quad Q(1,2,2)$

3.-punt simètric, $P' = 2Q - P = (2,4,4) - (1,2,2) = (1,2,2)$ $\boxed{P' = P = (1,2,2)}$

$\Rightarrow$ el punt P pertany a la recta r,

3.17

Donats els plans paral·lels $\pi_1 : \{3x+4z-15=0\}$ i $\pi_2 : \{3x+4z+10=0\}$ trobeu la distància entre ells.

RAONAMENT

1.- triem un punt A de $\pi_1 : \{3x+4z-15=0\} \Rightarrow \begin{cases} y=0 \\ z=0 \Rightarrow A(5,0,0) \\ x=5 \end{cases}$

2.- distància del punt A al pla $\pi_2 : \{3x+4z+10=0\}$,

$d = \dfrac{|15+0+0+10|}{\sqrt{9+0+16}} = \dfrac{25}{5} = 5$ $\boxed{d=5}$

3.18

Equació del pla que conté al l'eix OY i dista 4 u. del punt $P(0,0,5)$.

RAONAMENT

1.- feix de plans que contenen a l'eix OY, $\{1x+0y+tz+0=0\}$

2.- condició de distància, $4 = \pm\dfrac{5t}{\sqrt{1+t^2}} \Rightarrow 16t^2+16=25t^2 \Rightarrow$

$t=\pm\dfrac{4}{3} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} \pi_1 : 3x+4z=0 \\ \pi_2 : 3x-4z=0 \end{cases}}$

3.19

Trobeu un punt de la recta $r : \left\{\dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z}{-1}\right\}$ que té igual distància als plans $\pi_1 : \{4x+3z+4=0\}$ i $\pi_2 : \{2x+2y+z-2=0\}$.

RAONAMENT

1.- punt genèric de la recta r, $P(2t-1,t,-t)$

2.- condició de distància, $\frac{4(2t-1)+3(-t)+4}{5}=\pm\frac{2(2t-1)+2t-t-2}{3}$

$$\Rightarrow \frac{5t}{5}=\pm\frac{5t-4}{3} \Rightarrow 3t=\pm(5t-4) \Rightarrow \begin{cases} t=2 \\ t=\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} P_1(3,2,-2) \\ P_2(0,\frac{1}{2},-\frac{1}{2}) \end{cases}}$$

3.20

Equació del pla que passa per la recta $r:\{y=1,x+z+1=0\}$ i dista 2 u. del punt $P(1,1,1)$.

RAONAMENT

1.- feix de plans que passen per la recta $r:\{y=1,x+z+1=0\}$

$$\{(y-1)+t(x+z+1)=0\} \Rightarrow \{tx+y+tz+t-1=0\}$$

2.- distància del punt al pla: $d=\frac{|t+1+t+t-1|}{\sqrt{2t^2+1}} \Rightarrow \frac{9t^2}{2t^2+1}=4 \qquad t=\pm 2$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{cases} 2x+y+2z+1=0 \\ 2x-y+2z+3=0 \end{cases}}$$

3.21

Donada la recta $r:\{z=-1,x-y-1=0\}$ i el pla $\pi:\{x+z=3\}$ trobeu l'angle α que formen.

RAONAMENT

1.- vectors direccionals de la recta i del pla,

$$\vec{v}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}=(1,-1,0) \quad i \quad \vec{w}=(1,0,1)$$

2.- angle entre els vectors, $\alpha = \cos^{-1}\dfrac{|1+0+0|}{2} = 60^o$

3.- angle entre recta i pla, $\beta = 90^o - \alpha \quad \Rightarrow \quad \boxed{\beta = 30^o}$

3.22

Punt B simètric del punt $A(1,2,3)$ respecte del pla $\pi : \{y+z-3=0\}$.

RAONAMENT

1.- recta perpendicular al pla $\pi : \{y+z-3=0\}$ que passa per A,

$$\frac{x-1}{0} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{1}$$

2.- punt M intersecció entre la recta i el pla, $\begin{cases} x=1 \\ y=z-1 \Rightarrow M(1,1,2) \\ z=3-y \end{cases}$

3.- punt B simètric de A, $B = 2M - A = (2,2,4)-(1,2,3)=(1,0,1)$

$\boxed{B(1,0,1)}$

3.23

Trobeu el punt B simètric del punt $A(0,1,-1)$ respecte de la recta $r : \{y-1=0, x+z-3=0\}$.

RAONAMENT

1.- punt genèric de la recta r, $P(t,1,3-t) \qquad \overrightarrow{AP} = (t,0,4-t)$

2.- vector director de la recta r, $\vec{v} = (1,0,-1)$

3.- condició de perpendicularitat entre $\vec{v} = (1,0,-1)$ i $\overrightarrow{AP} = (t,0,4-t)$,

$\Rightarrow 2t-4=0 \Rightarrow t=2 \Rightarrow P(2,1,1)$

4.- punt B simètric de A,

$B = 2P - A = (4,2,2)-(0,1,-1)=(4,1,3) \qquad \boxed{B(4,1,3)}$

3.24

Donades les rectes $r:\left\{\frac{x-1}{3}=\frac{y}{2}=\frac{z}{-1}\right\}$ *i* $s:\{x=3-t,y=2+t,z=1-t\}$ *trobeu l'angle que formen entre elles.*

RAONAMENT

1.- vectors directors de les dues rectes, $\vec{v_r}=(3,2,-1)$ *i* $\vec{v_s}=(-1,1,-1)$

2.- angle que formen les dues rectes, $\alpha=\cos^{-1}\frac{|-3+2+1|}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{3}}=90^o$

$\boxed{\text{les rectes són perpendiculars}}$

3.25

Trobeu l'angle que formen els plans: $\pi_1:\{-x+2y+z=1\}$ *i* $\pi_2:\{x+y+2z-3=0\}$.

RAONAMENT

1.-vectors directors dels plans, $\vec{w_1}=(-1,2,1)$ *i* $\vec{w_2}=(1,1,2)$

2.-angle entre els dos plans, $\alpha=\cos^{-1}\frac{|-1+2+2|}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{6}}=\cos^{-1}\frac{1}{2}=60^o$ $\boxed{\alpha=60^o}$

3.26

Trobeu l'angle que forma la recta $r:\left\{\frac{x-1}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z+1}{-1}\right\}$ *i el pla* $\pi:\{x+2y+z=3\}$.

RAONAMENT

1.- vectors directors de recte i pla, $\vec{v_r}=(2,1,-1)$ *i* $\vec{w}=(1,2,1)$

2.- angle entre els vectors, $\alpha = \cos^{-1}\dfrac{|2+2-1|}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{6}} = 60^o$

3.- angle entre recta i pla, $\boxed{\beta = 90^o - \alpha = 30^o}$

3.27

Trobeu la distància entre els punts $A(0,1,-1)$ i $B(2,4,5)$.

RAONAMENT

1.- vector $\overrightarrow{AB} = (2,3,6)$ distància $d = \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{4+9+36} = 7$ $\boxed{d = 7}$ u

3.28

Trobeu la distància del punt $P(-2,-1,0)$ a:

a) la recta, $r : \{x + 3y + 1 = 0, 4y - z + 7 = 0\}$

b) el pla, $\pi : \{3x + 2y + 6z - 41 = 0\}$

RAONAMENT

a)

1.- punt genèric de la recta $Q(-3t-1, t, 4t+7)$

2.- vector director de r, $\vec{v} = (-3,1,4)$ i vector $\overrightarrow{PQ} = (-3t+1, t+1, 4t+7)$

3.- perpendicularitat entre $\vec{v} = (-3,1,4)$ i $\overrightarrow{PQ} = (-3t+1, t+1, 4t+7)$

$\Rightarrow \quad 9t - 3 + t + 1 + 16t + 28 = 0 \quad \Rightarrow \quad t = -1 \quad \Rightarrow \quad Q(2,-1,3)$

4.- distància, $d = \left|\overrightarrow{PQ}\right| = \sqrt{16+0+9} = 5$ $\boxed{d = 5}$ u.

b)

1.- distància $d = \dfrac{|-6-2+0-41|}{\sqrt{9+4+36}} = \dfrac{49}{7} = 7$ $\boxed{d = 7}$ u.

3.29

Trobeu la distància entre els plans paral·lels $\pi_1:\{2x+2y-z=0\}$ i $\pi_2:\{2x+2y-z-3=0\}$.

RAONAMENT

1.- fixem un punt A del pla $\pi_1:\{2x+2y-z=0\} \Rightarrow \quad A(0,0,0)$

2.- distància del punt A al pla $\pi_2:\{2x+2y-z-3=0\}$.

$d=\dfrac{|0+0-0-3|}{\sqrt{9}} \qquad \boxed{d=1}$ u.

3.30

Trobeu la distància entre les rectes r i s en els següents casos,

$r:\left\{\dfrac{x-1}{4}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z-1}{3}\right\}$	$s:\left\{\dfrac{x+1}{4}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-2}{3}\right\}$
$r:\left\{\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-2}{0}\right\}$	$s:\left\{\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z-2}{1}\right\}$
$r:\left\{\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{0}=\dfrac{z}{3}\right\}$	$s:\left\{\dfrac{x-5}{2}=\dfrac{y-3}{1}=\dfrac{z-2}{1}\right\}$

RAONAMENT

a)rectes paral·leles,

1.- punt fix de r, $A(1,2,1)$ i punt genèric de s, $B(4t-1,t+1,3t+2)$

2.- $\begin{cases}\overrightarrow{AB}=(4t-2,t-1,3t+1)\\ \vec{v}=(4,1,3)\end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{AB}\cdot\vec{v}=16t-8+t-1+9t+3=0$

$\Rightarrow 26t-6=0 \quad \Rightarrow \quad t=\dfrac{3}{13} \qquad \boxed{d=\left|\overrightarrow{AB}\right|=\dfrac{1}{13}\sqrt{14^2+10^2+22^2}=\dfrac{\sqrt{780}}{13}}$

b) 1.- rectes incidents en el punt A(1,0,2) $\qquad \boxed{d=0}$

c) 1.- $\left|\begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}\right| = -12+10+2=0$ $\quad rang\begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 2$ les rectes són incidents aleshores $\boxed{d=0}$

3.31

Trobeu la distància entre el punt $P(1,0,-1)$ i el pla $\pi:\{x-y-z+1=0\}$.

RAONAMENT

1.- distància $\quad d=\dfrac{|1-0+1+1|}{\sqrt{3}} \quad \boxed{d=\sqrt{3}}$ u.

3.32

Trobeu la distància entre el punt $P(1,0,-1)$ i la recta $r:\{x-z=2, y=0\}$

RAONAMENT

1.-punt genèric de la recta $Q(t+2,0,t)$ $\quad \overrightarrow{PQ}=(t+1,0,t+1)\approx(1,0,1)$

2.-vector director de la recta $\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (1,0,1)$

els dos vectors són paral·lels aleshores el punt P pertany a la recta i $\boxed{d=0}$

3.33

Coordenades del punt Q simètric del $P(0,1,2)$ respecte: a) de l'origen. b) del pla $\pi:\{x-3z-4=0\}$

RAONAMENT

a)

$Q = 2O - P = (0,0,0) - (0,1,2)$ $\boxed{Q(0,-1,-2)}$

b)

1.-recta perpendicular al pla que passa per P, $\frac{x}{1} = \frac{y-1}{0} = \frac{z-2}{-3}$

2.-punt M intersecció entre recta i pla, $M\begin{cases} x = 3z + 4 \\ y = 1 \\ z = -3x + 2 \end{cases} \Rightarrow M(1,1,-1)$

3.-punt simètric $Q = 2M - P = (2,2,-2) - (0,1,2) = (2,1,-4)$ $\boxed{Q(2,1,-4)}$

4. POSICIONS RELATIVES

4.1

Estudia la posició de les rectes següents:

$r:\{x=1-2t,\ y=2-t,\ z=3+t\}$ $s:\left\{\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+2}{1}=\dfrac{z}{-1}\right\}$

RAONAMENT

1.- dades de les rectes i del vector que uneix les dues rectes

$$r:\{x=1-2t,\ y=2-t,\ z=3+t\}\Rightarrow\begin{cases}A(1,2,3)\\ \vec{v}_r=(-2,-1,1)\end{cases}$$

$$s:\left\{\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{1}=\frac{z}{-1}\right\}\Rightarrow\begin{cases}B(1,-2,0)\\ \vec{v}_s=(2,1,-1)\end{cases}\qquad \overrightarrow{AB}=(0,-4,-3)$$

2.- dependència o independència lineal dels vectors directors,

$$rang\begin{pmatrix}-2 & -1 & 1\\ 2 & 1 & -1\end{pmatrix}=1\Rightarrow \text{vectors paral·lels}$$

3.- dependència o independència lineal dels vectors directors de les rectes i del vector que uneix les dues rectes,

$$rang\begin{pmatrix}o & -4 & -3\\ -2 & -1 & 1\\ 2 & 1 & -1\end{pmatrix}=2\Rightarrow \boxed{\text{rectes paral·leles}}$$

4.2

Estudia la posició de les rectes següents:

$r:\{x=0,\ y=1,\ z=t\}$	$s:\{x=2+t,\ y=-t,\ z=1+t\}$

RAONAMENT

1.- dades de les rectes i del vector que uneix les dues rectes

$$r:\{x=0,\ y=1,\ z=t\}\Rightarrow\begin{cases}A(0,1,0)\\ \vec{v}_r=(0,0,1)\end{cases}$$

$$s:\{x=2+t, y=-t, z=1+t\} \Rightarrow \begin{cases} B(2,0,1) \\ \vec{v}_s=(1,-1,1) \end{cases} \qquad \overrightarrow{AB}=(2,-1,1)$$

2.- dependència o independència lineal dels vectors directors,

$$rang\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}=2 \Rightarrow \text{ vectors no paral·lels}$$

3.- dependència o independència lineal dels vectors directors de les rectes i del vector que uneix les dues rectes,

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow rang\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}=3 \Rightarrow \quad \boxed{\text{les rectes es creuen}}$$

4.3

Estudia la posició de les rectes següents:

$$r:\{x=t, y=2+t, z=-t\} \qquad s:\left\{\frac{x}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z+2}{1}\right\}$$

RAONAMENT

1.- dades de les rectes i del vector que uneix les dues rectes

$$r:\{x=t, y=2+t, z=-t\} \Rightarrow \begin{cases} A(0,2,0) \\ \vec{v}_r=(1,1,-1) \end{cases}$$

$$s:\left\{\frac{x}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z+2}{1}\right\} \Rightarrow \begin{cases} B(0,1,-2) \\ \vec{v}_s=(1,2,1) \end{cases} \qquad \overrightarrow{AB}=(0,-1,-2)$$

2.- dependència o independència lineal dels vectors directors,

$$rang\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}=2 \Rightarrow \text{ vectors no paral·lels}$$

3.- dependència o independència lineal dels vectors directors de les rectes i del vector que uneix les dues rectes,

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow rang\begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = 2 \Rightarrow \boxed{les\ rectes\ es\ tallen}$$

4.4

Estudia la posició relativa dels plans $\pi_1 : \{ax - y + 2z - 2 = 0\}$ *i* $\pi_2 : \{2x - 2y + 4az = 0\}$ *segon el valor del paràmetre a.*

RAONAMENT

1.- matriu dels coeficients i ampliada del sistema que formen els dos plans

$$A = \begin{pmatrix} a & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 4a \end{pmatrix} \quad i \quad \overline{A} = \begin{pmatrix} a & -1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 4a & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a & -1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow a = 1 \qquad \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 4a \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow a = 1$$

2.- discussió del sistema,

$$\begin{cases} a = 1 \Rightarrow (1 = rangA \neq rang\overline{A} = 2) \\ a \neq 1 \Rightarrow (rangA = rang\overline{a} = 2) \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{matrix} paral·leles \\ incidents \end{matrix}}$$

4.5

Estudia la posició relativa dels plans $\pi_1 : \{x + y + 2z = 0\}$ $\pi_2 : \{mx - y = 0\}$ $\pi_3 : \{3x + mz = 0\}$ *segon el valor del paràmetre m.*

RAONAMENT

1.- matriu dels coeficients i ampliada del sistema format pels tres plans,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ m & -1 & 0 \\ 3 & 0 & m \end{pmatrix} \quad i \quad \overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ m & -1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & m & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \quad rangA = rang\overline{A}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow rang A \geq 2, \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ m & -1 & 0 \\ 3 & 0 & m \end{vmatrix} = -(m^2 + m - 6) = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = 2 \\ m = -3 \end{cases}$$

2.-discussió del sistema,

$$\begin{cases} m = 2 \Rightarrow rang A = rang \overline{A} = 2 \\ m = -3 \Rightarrow rang A = rang \overline{A} = 2 \\ m \neq \{2,-3\} \Rightarrow rang A = rang \overline{A} = 3 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} es\_tallen\_en\_una\_recta \\ es\_tallen\_en\_una\_recta \\ es\_tallen\_en\_el\_punt(0,0,0) \end{array}}$$

4.6

Calculeu el valor d'a per tal que les rectes $r: \left\{ \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-3}{-1} \right\}$ i $s: \{x - y + 3z - 10 = 0, 3x - y + az + 3 = 0\}$ formin un pla i trobeu la seva equació.

RAONAMENT

1.- $r: \left\{ \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-3}{-1} \right\} \Rightarrow \begin{cases} A(1,0,3) \\ \vec{v} = (2,1,-1) \end{cases}$

2.- feix de plans que passen per s, $3x - y + az + 3 + t(x - y + 3z - 10) = 0$

3.-per passar pel punt $A(1,0,3) \Rightarrow 3 + 3a + 3 + 0 = 0 \Rightarrow a = -2$ $\boxed{a = -2}$

4.-el vector $\vec{v} = (2,1,-1)$ és perpendicular al $\vec{w} = (3 + t, -1 - t, a + 3t) \Rightarrow$

$$2(3 + t) + (-1 - t) - (-2 + 3t) = 0 \Rightarrow t = \frac{7}{2} \quad \Rightarrow \boxed{13x - 9y + 17z - 64 = 0}$$

4.7

Estudia la posició relativa de la recta $r: \{x - y + 2z - 3 = 0, x + z = -1\}$ i del pla $\pi: \{3x - y + az = 0\}$.

RAONAMENT

1.-sistema $\begin{cases} 3x-y+az=0 \\ x-y+2z=3 \\ x+z=-1 \end{cases}$ $A=\begin{pmatrix} 3 & -1 & a \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\overline{A}=\begin{pmatrix} 3 & -1 & a & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & a \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -3+1+a = a-2$$

a) si $a \neq 2$ $\quad rangA = rang\overline{A} = 3$ el sistema és compatible i determinat

$\boxed{\text{la recta talla al pla en un punt}}$

b) si $a = 2$ $\quad \begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 3-1+0=2 \neq 0$

$rangA = 2 \neq rang\overline{A} = 3$ sistema incompatible

$\boxed{\text{la recta és paral·lela al pla}}$

4.8

Estudieu la posició relativa entre la recta $r:\left\{\frac{x-1}{3}=\frac{y-2}{1}=\frac{z}{2}\right\}$ i el pla $\pi:\{2x-y+z-3=0\}$.

RAONAMENT

1.-sistema $\begin{cases} x-3y=-5 \\ 2x-3z=2 \\ 2x-y+z=3 \end{cases}$ $A=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 2 & 0 & -3 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ $\overline{A}=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & -5 \\ 2 & 0 & -3 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 2 & 0 & -3 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 21 \neq 0 \Rightarrow rangA = rang\overline{A} = 3 \Rightarrow$$

sistema compatible determinat $\Rightarrow$ $\boxed{\text{es tallen en un punt}}$

4.9

Demostreu que la recta $r:\{x-3y+z-1=0, 2x+y-z+3=0\}$ *està continguda en el pla* $\pi:\{4x-5y+z+1=0\}$.

RAONAMENT

1.- discissió del sistema

$$\begin{cases} x-3y+z=1 \\ 2x+y-z=-3 \\ 4x-5y+z=-1 \end{cases} \quad A=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 4 & -5 & 1 \end{pmatrix} \quad \overline{A}=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & -3 \\ 4 & 5 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 4 & -5 & 1 \end{vmatrix}=0 \quad \begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ 4 & -5 & -1 \end{vmatrix}=0 \quad rang A = rang\,\overline{A}=2$$

Sistema compatible indeterminat $\boxed{\textit{recta continguda en el pla}}$

4.10

Estudia la posició relativa de les rectes $r:\{x=t, y=-2t, z=1+t\}$ *i* $s:\{x=-t, y=2-t, z=1\}$.

RAONAMENT

1.-punt i vector director de cada recta

$$r:\{x=t, y=-2t, z=1+t\} \Rightarrow \begin{cases} A(0,0,1) \\ \vec{v}_r=(1,-2,1) \end{cases}$$

$$s:\{x=-t, y=2-t, z=1\} \Rightarrow \begin{cases} B(0,2,1) \\ \vec{v}_s=(-1,-1,0) \end{cases} \qquad \overrightarrow{AB}=(0,2,0)$$

2.- dependència o independència dels tres vectors

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \Rightarrow rang\begin{pmatrix} \vec{v_r} \\ \vec{v_s} \\ \overrightarrow{AB} \end{pmatrix} = 3 \qquad \boxed{\text{les rectes es creuen}}$$

4.11

Trobeu el valor d'a per tal de que les rectes $r:\{x=t, y=1-4t, z=2-t\}$ *i* $s:\{x=a, y=3-2t, z=4-t\}$ *es creuin.*

RAONAMENT

1.-punt i vector director de cada recta

$$r:\{x=t, y=1-4t, z=2-t\} \Rightarrow \begin{cases} A(0,1,2) \\ \vec{v_r} = (1,-4,-1) \end{cases}$$

$$s:\{x=a, y=3-2t, z=4-t\} \Rightarrow \begin{cases} B(a,3,4) \\ \vec{v_s} = (0,-2,-1) \end{cases} \qquad \overrightarrow{AB} = (a,2,2)$$

2.- dependència o independència dels tres vectors

$$\begin{vmatrix} \vec{v_r} \\ \vec{v_s} \\ \overrightarrow{AB} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -4 & -1 \\ 0 & -2 & -1 \\ a & 2 & 2 \end{vmatrix} = 2a-2 \qquad Si \begin{cases} a=1 \\ a \neq 1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{matrix} incidents \\ es\_creuen \end{matrix}}$$

4.12

Estudia la posició relativa de les rectes r i s

$r:\{x+2y-z=0, 3x+y+z=4\} \qquad s:\{x-z=0, 2x-y-z=1\}$

RAOANMENT

1.-punt i vector director de cada recta, punt de la recta r: $A(1,0,1)$ vector de r: $\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (3,-4,-5)$

punt de la recta s: $B(0,-1,0)$ vector de s: $\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = (-1,-1,-1)$

vector $\overrightarrow{AB} = (-1,-1,-1)$

2.- dependència o independència dels tres vectors,

$\begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 3 & -4 & -5 \\ -1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0$ les rectes estan en un mateix pla i de vectors no paral·lels aleshores $\boxed{\text{les rectes es tallen en un punt.}}$

4.13

Estudia la posició relativa de les rectes r i s

$r: \{x + y = 0, 3x - 2y = 2\}$ $s: \{x + y - z = 1, x + y + z = 3\}$

RAOANMENT

1.-punt i vector director de cada recta,

punt de la recta r: $A(\frac{2}{5},-\frac{2}{5},0)$ vector de r: $\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 0 \end{vmatrix} = (0,0,-5)$

punt de la recta s: $B(2,0,1)$ vector de s: $\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (2,-2,0)$

vector $\overrightarrow{AB} = (\frac{8}{5},\frac{2}{5},1)$

2.- dependència o independència dels tres vectors,

$$\begin{vmatrix} 8 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & -5 \\ 2 & -2 & 0 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \boxed{\text{les rectes es creuen}}$$

4.14

Estudieu la posició relativa de les rectes $r:\{x-y=-1, 3y-z=6\}$ *i* $s:\{x-ay+2a-1=0, 3x-az=3\}$ *segons el valor del paràmetre a.*

RAOANMENT

1.- punt i vector director de cada recta,

$$r:\{x-y=-1, 3y-z=6\} \Rightarrow \begin{cases} A(1,2,0) \\ \vec{v}_r = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \end{vmatrix} = (1,1,3) \end{cases}$$

$$s:\{x-ay+2a-1=0, 3x-az=3\} \Rightarrow \begin{cases} B(1,2,0) \\ \vec{v}_s = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -a & 0 \\ 3 & 0 & -a \end{vmatrix} = a(a\ ,1,3) \end{cases}$$

$$\overrightarrow{AB} = (0,0,0) \quad si \begin{cases} a=1 \\ a \neq 1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{matrix} mateixa\_recta \\ es\_tallen\_en\_el\_punt(1,2,0) \end{matrix}}$$

4.15

Trobeu el valor d'a de manera que els plans $\pi_1:\{x+y-2=0\}$, $\pi_2:\{2x+y-z=0\}$ *i* $\pi_3:\{ax+y-2z+2=0\}$ *determinin una recta.*

RAOANMENT

$$\begin{cases} x+y=2 \\ 2x+y-z=0 \\ ax+y-2z=-2 \end{cases} \qquad A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ a & 1 & -2 \end{pmatrix} \qquad \overline{A}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ a & 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ a & 1 & -2 \end{vmatrix}=-1+4-a=3-a \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ a & 1 & -2 \end{vmatrix}=2(2-a)+2=6-2a$$

1.- si $\boxed{a=3} \Rightarrow \quad rangA = rang\,\overline{A} = 2$ $\quad$ $\boxed{\text{els plans determinen una recta}}$

2.- si $a \neq 3 \Rightarrow \quad rangA = rang\,\overline{A} = 3$ $\quad$ $\boxed{\text{els plans determinen un punt}}$

4.16

Donats els plans $\pi_1 : \{x-y+z-2=0\}$ *i* $\pi_2 : \{2x-ay+2z=0\}$ *trobeu la seva posició relativa segons els valors del paràmetre a.*

RAONAMENT

1.- sistema $\begin{cases} x-y+z=2 \\ 2x-ay+2z=0 \end{cases} \qquad A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -a & 2 \end{pmatrix} \qquad \overline{A}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & -a & 2 & 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -a \end{vmatrix}=2-a \Rightarrow \begin{cases} a=2 \\ a\neq 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} rangA=1 \\ rangA=2 \end{matrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}=-4\neq 0 \Rightarrow rang\,\overline{A}=2$$

2.- si $\begin{cases} a=2 & rangA=1\neq rang\,\overline{A}=2 \\ a\neq 2 & rangA=rang\,\overline{A}=2 \end{cases}$ $\qquad \boxed{\begin{matrix} a=2\_paral{\cdot}lels \\ a\neq 2\_incidents \end{matrix}}$