PROBABILITAT I ESTADÍSTICA

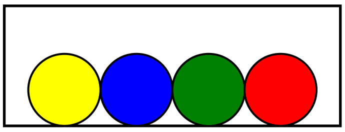
INTRODUCCIÓ
Llibre amb continguts de Combinatòria, Probabilitat i Estadística Descriptiva adreçat als alumnes de Secundària i Batxillerat.

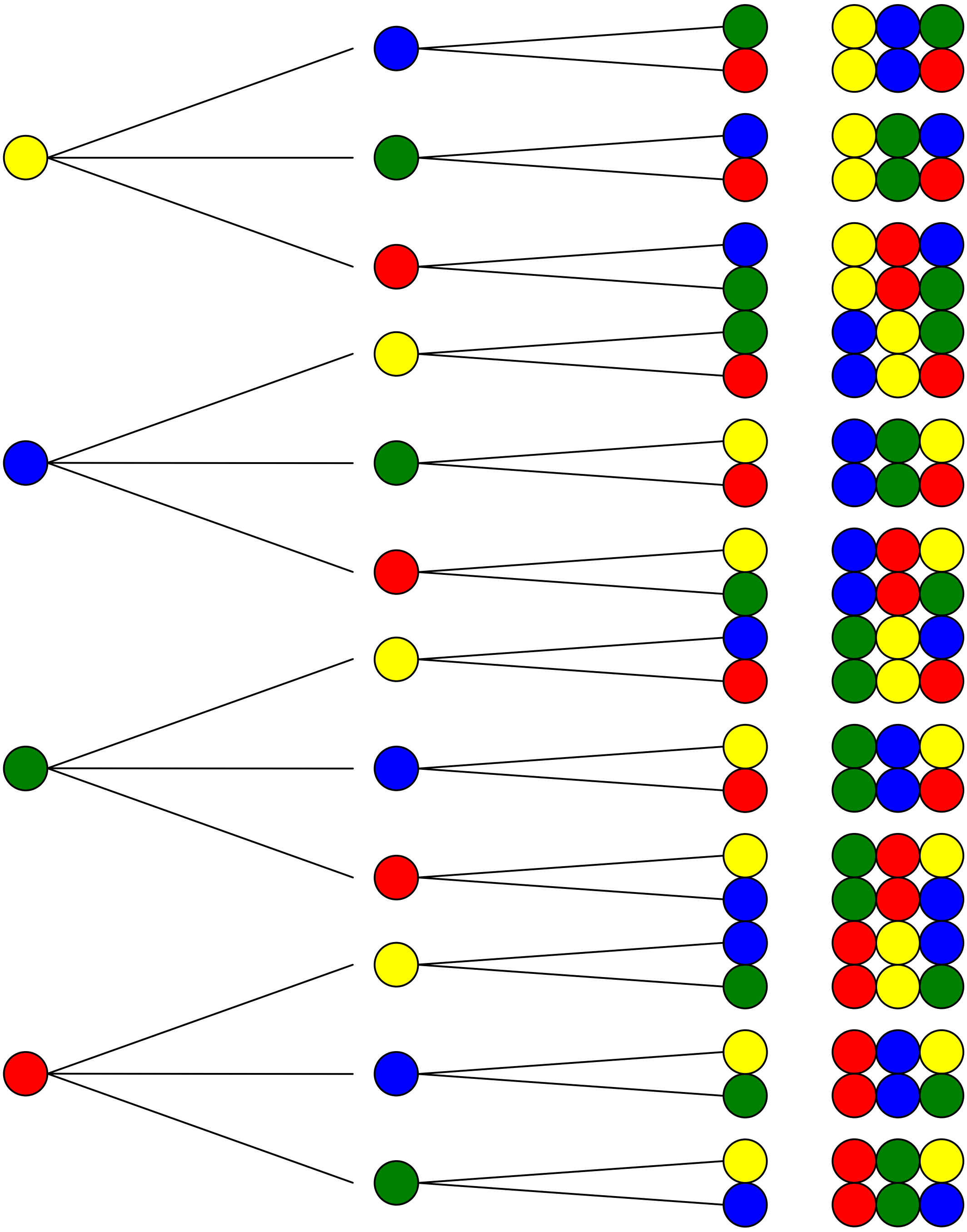
Xavier Rabasa Arévalo
Professor de Matemàtiques

ÍNDEX

Variacions ordinàries (grups triats amb ordre i sense repetició)

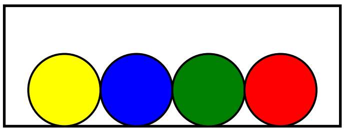
Exemple: triar tres boles d'una amb una sense retorn de la següent urna.

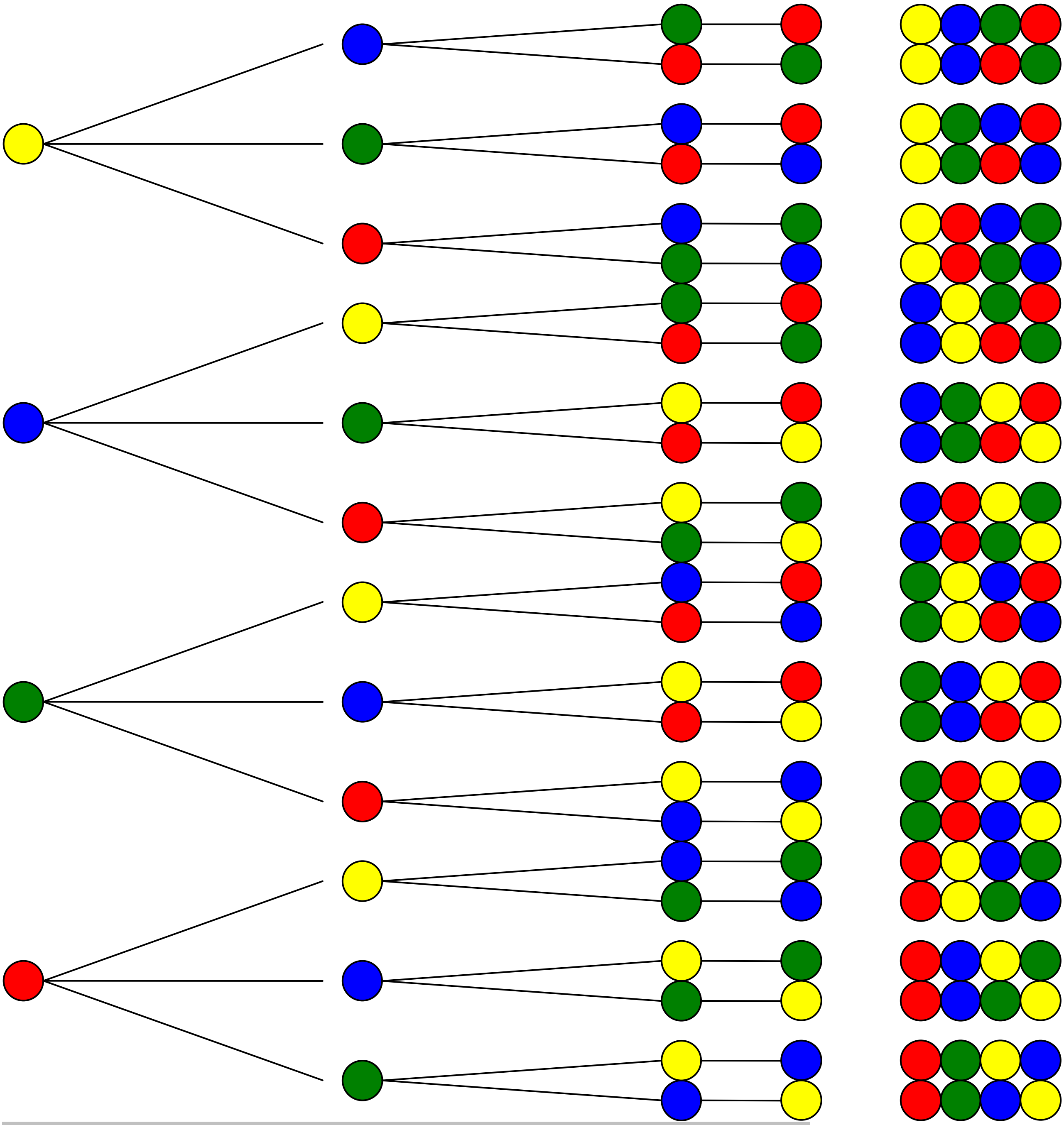




$V_4^3 = 4{\cdot}3{\cdot}2 = 24 \qquad V_m^n = m(m-1)(m-2)....(m-n+1)$

Permutacions: (grups totals triats amb ordre i sense repetició)
Exemple: triar totes les boles d'una amb una sense retorn de la següent urna.

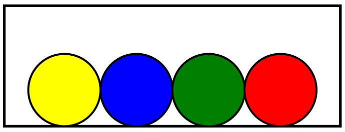


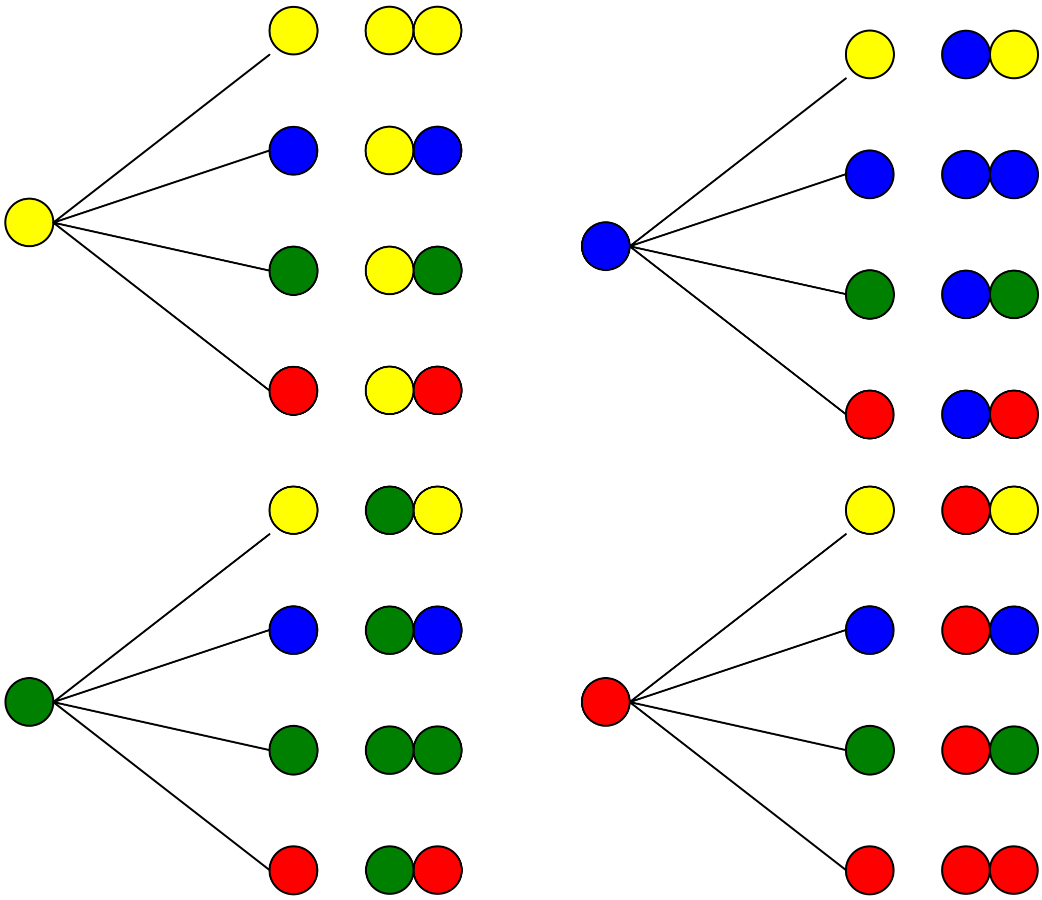


$P_4 = 4{\cdot}3{\cdot}2{\cdot}1 = 24 \qquad P_n = n! = n(n-1)(n-2).....2{\cdot}1$

Variacions amb repetició (grups triats amb ordre i amb possible repetició)

Exemple: triar dues boles d'una amb una i amb retorn de la següent urna.

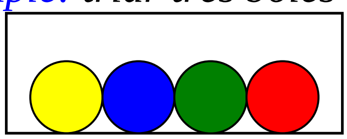


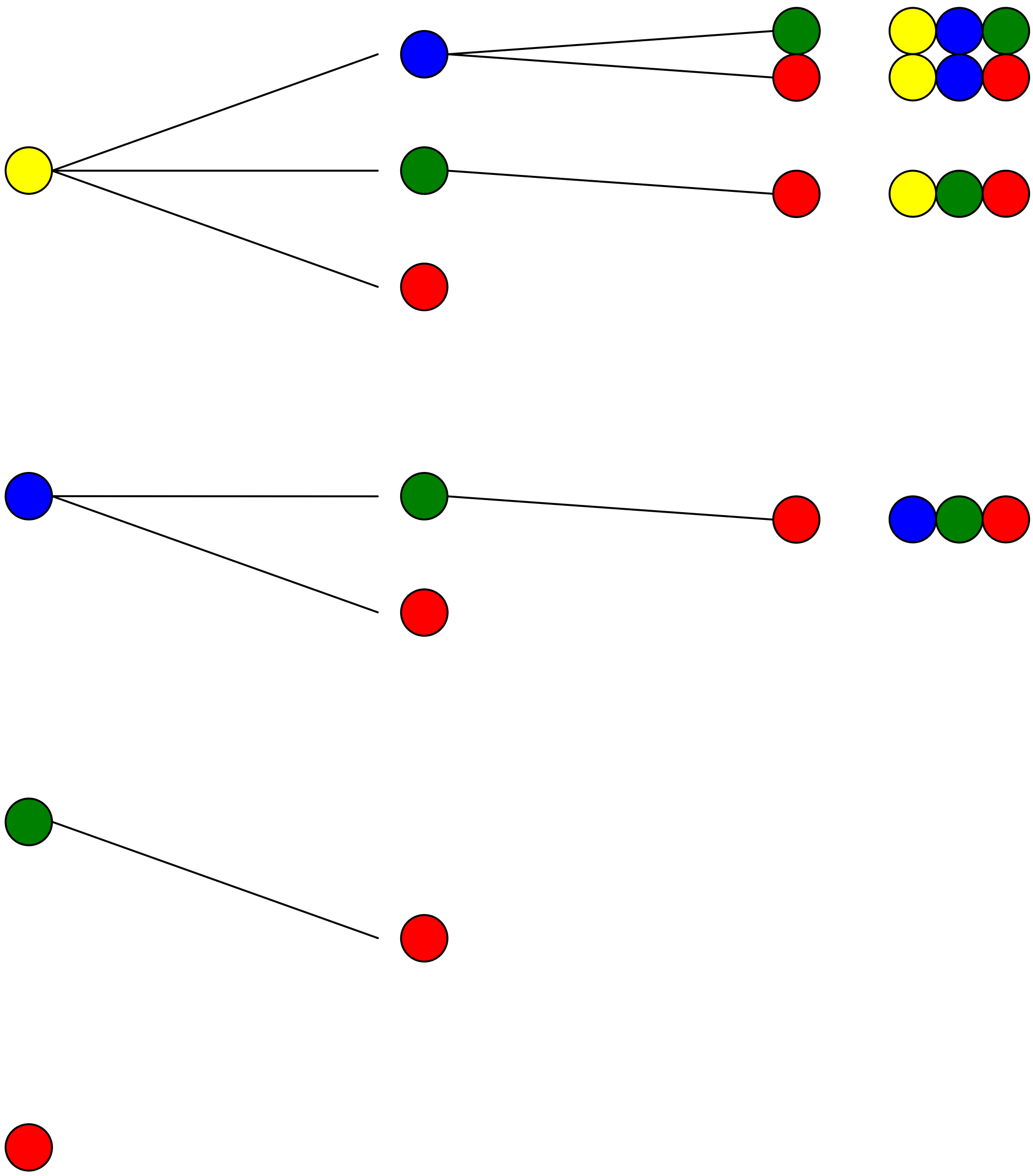


$VR_4^2 = 4 \cdot 4 = 4^2$ $\qquad$ $VR_m^n = m.m.....m = m^n$

Combinacions ordinàries (grups triats sense ordre i sense repetició)

Exemple: triar tres boles de cop i sense retorn de la següent urna.



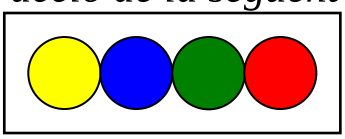


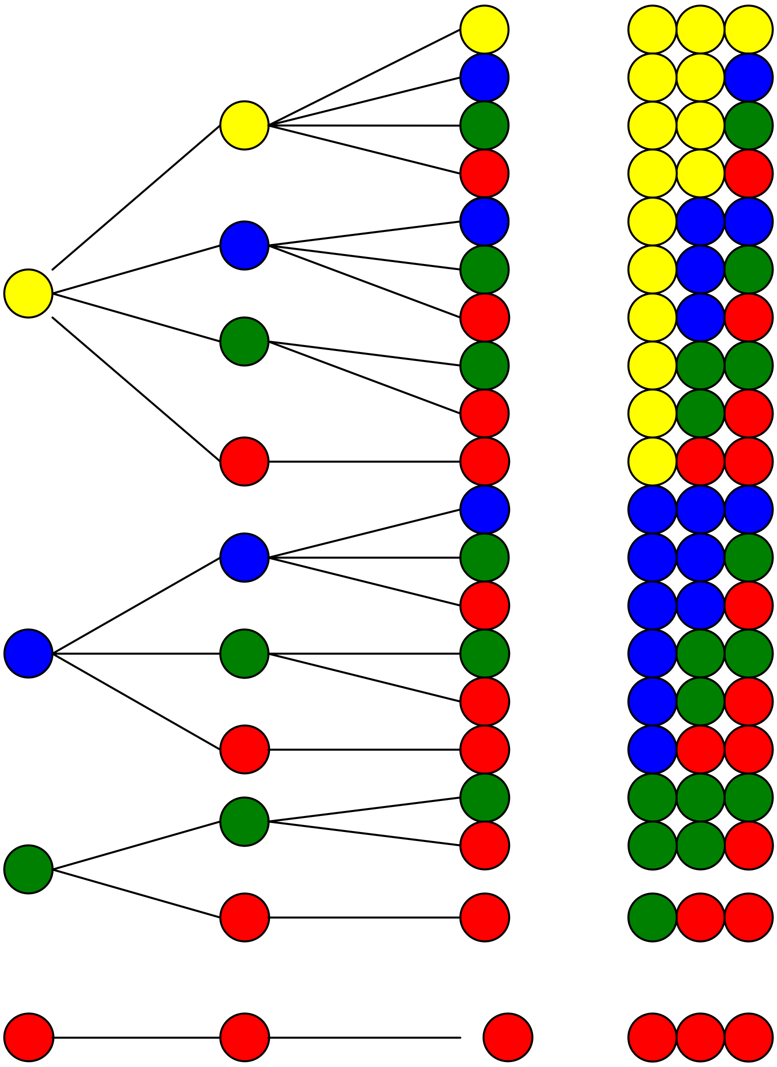
$$C_4^3 = \frac{V_4^3}{P_3} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 4 \qquad C_m^n = \frac{V_m^n}{P_n}$$

---

*Combinacions amb repetició**: (grups amb possible repetició i sense ordre)*

Exemple: *triar tres boles amb retorn i no tenir en compte l'ordre d'extracció de la següent urna:*

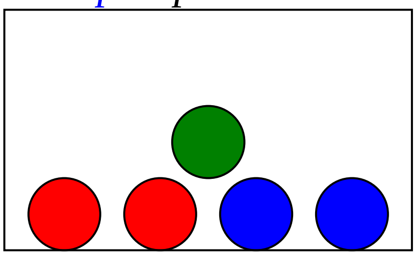


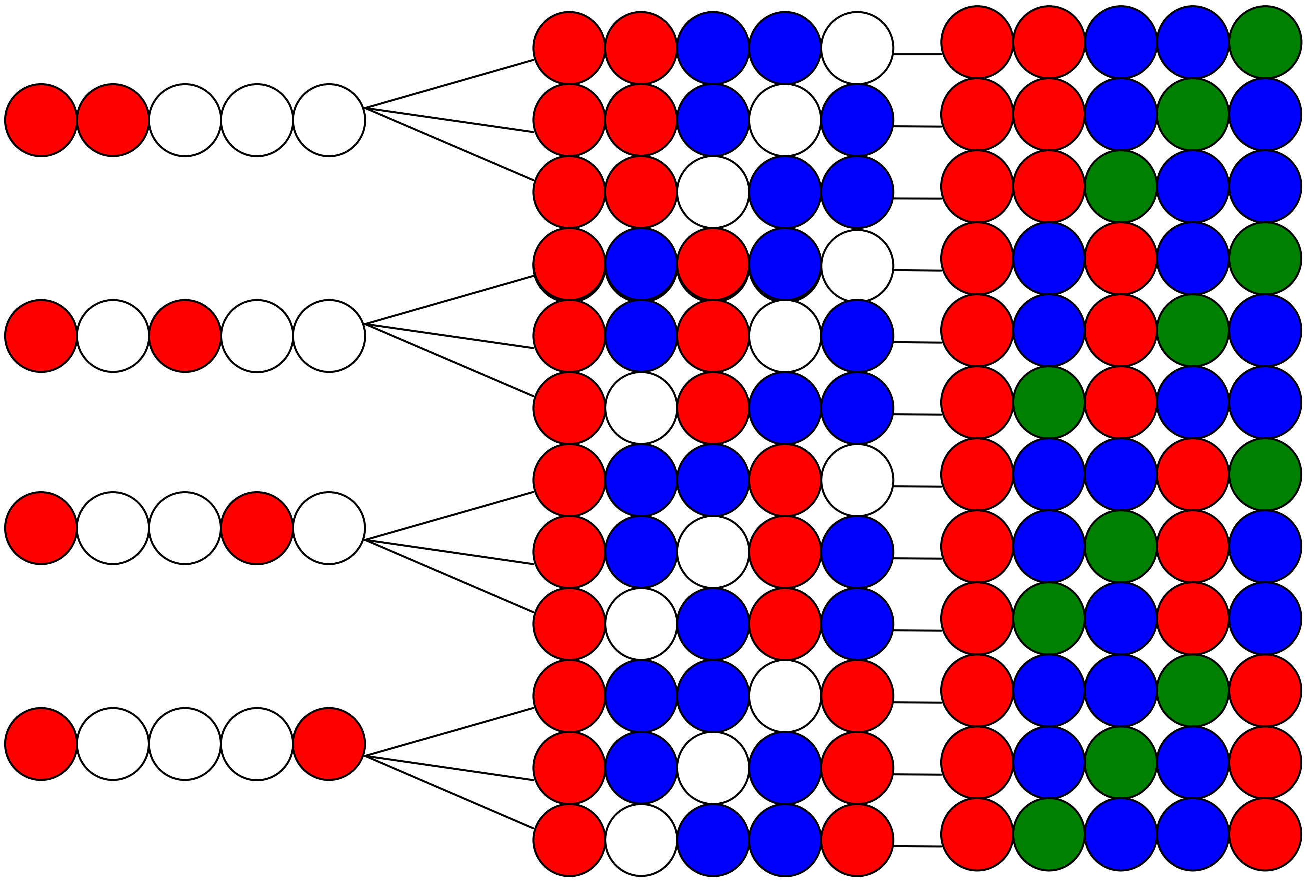


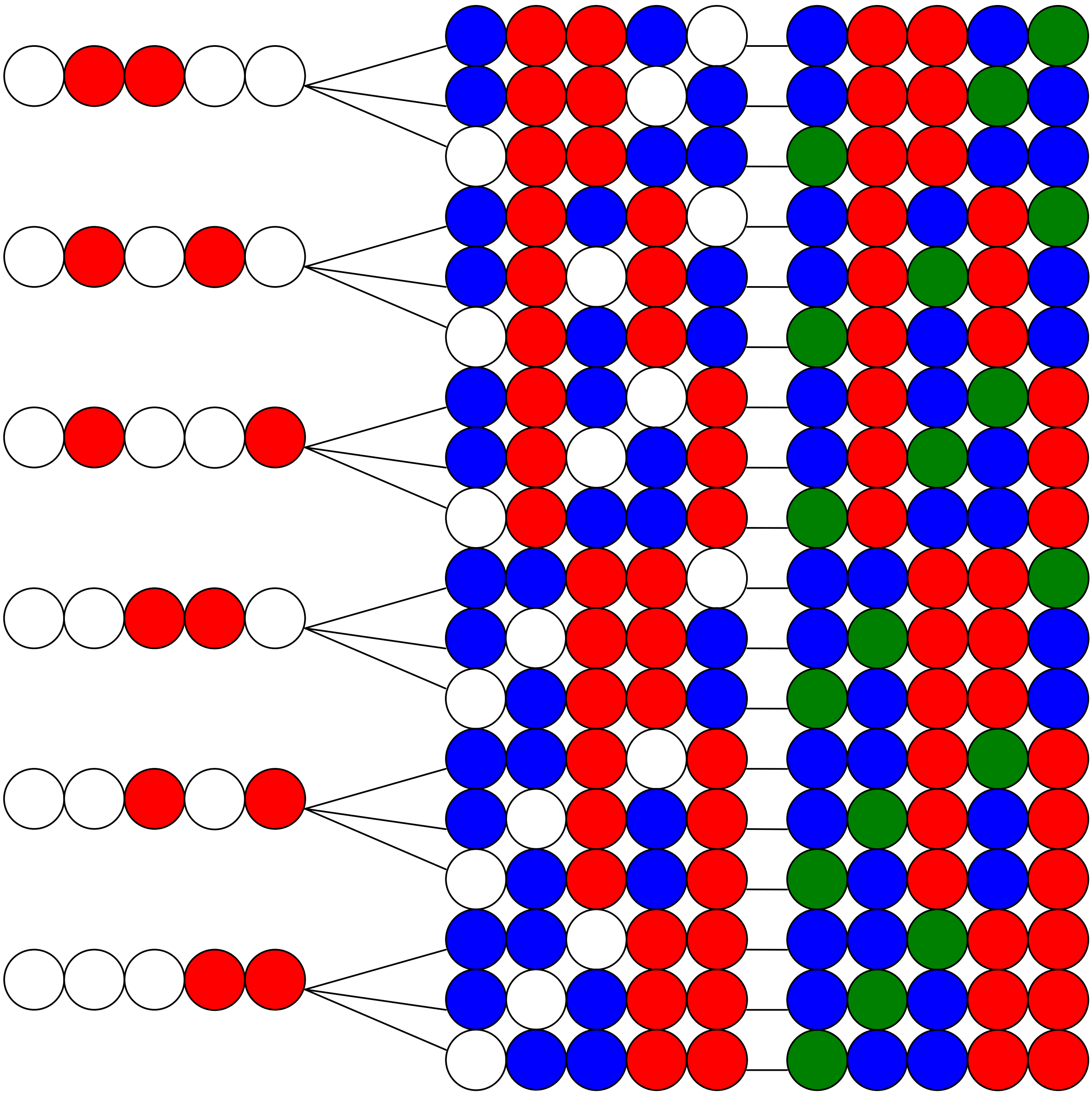
$$CR_4^3 = C_{4+3-1}^3 = \frac{V_6^3}{P_3} = \frac{6{\cdot}5{\cdot}4}{3{\cdot}2{\cdot}1} = 20 \qquad CR_m^n = C_{m+n-1}^n$$

Permutacions amb repetició (diferents particions d'un conjunt en subconjunts amb el nombre d'elements predeterminats per a cada subconjunt) = (permutacions d'un determinat conjunt d'objectes repetits o no repetits)

Exemple: permutar les boles de la següent urna







C_5^2 $\qquad$ $C_5^2 \cdot C_3^2$ $\qquad$ $\boxed{C_5^2 \cdot C_3^2 \cdot C_1^1}$

$$PR_5^{2,2,1} = C_5^2 \cdot C_3^2 \cdot C_1^1 = \frac{5!}{2! \cdot 2! \cdot 1!} = 30$$

PROPIETATS DEL NOMBRES COMBINATORIS

$$\binom{m}{0}=\binom{m}{m}=1 \qquad \binom{m}{n}=\binom{m}{m-n} \qquad \binom{m}{n}=\binom{m-1}{n-1}+\binom{m-1}{n}$$

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\cdots\cdots+\binom{n}{n-1}+\binom{n}{n}=2^{n}$$

$$\binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\cdots\cdots+(-1)^{n-1}\binom{n}{n-1}+(-1)^{n}\binom{n}{n}=0$$

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{2}+\binom{n}{4}+\cdots\cdots\cdots\cdots= \binom{n}{1}+\binom{n}{3}+\binom{n}{5}+\cdots\cdots\cdots\cdots= 2^{n-1}$$

EXERCICIS

1

Amb les lletres { A , B , C , D , E }. a) conteu els grups de dues lletres ordenats i amb possible repetició. b) conteu els grups de tres lletres sense ordre i amb possible repetició. c) formeu els grups de quatre lletres sense ordre i sense repetició. d) formeu els grups de cinc lletres amb ordre i sense repetició que comencen per AB.

RAONAMENT

a) $VR_5^2 = 5^2 = 25$

b) $CR_5^3 = C^3_{5+3-1} = \dfrac{7\cdot 6\cdot 5}{3\cdot 2\cdot 1} = 35$

c) $C_5^4 = 5$

BCDE – ACDE – ABDE – ABCE - ABCD

d) $V_3^3 = 6$

ABCDE – ABCED – ABECD – ABEDC – ABDCE - ABDEC

2

Contesta: a) formeu totes les ordenacions de la paraula ABBA

b) formeu totes les ordenacions de la paraula ESO c) conteu totes les ordenacions de la paraula MARE
RAONAMENT a) $PR_4^{2,2}=C_4^2 \cdot C_2^2=6$ AABB – ABAB – ABBA – BAAB – BABA – BBAA b) $P_3=3 \cdot 2 \cdot 1=6$ ESO – EOS – OES – OSE – SEO – SOE c) $P_4=4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1=24$

3 Formeu i conteu totes les ordenacions possibles de la paraula TUTOR que comencen per U i acaben en O
RAONAMENT Tenim que permutar TTR $\rightarrow$ $PR_3^{2,1}=3$ UTTRO – UTRTO - URTTO

4 En un taulell d'escacs de 8x8 caselles, trobeu: a) número de maneres diferents de posar tres peons al taulell. b) número de maneres diferents de posar una torre, un alfil i un peó al taulell.
RAONAMENT a) col·locar tes fitxes iguals en un taulell, és equivalent a triar tres caselles diferents sense ordre i sense repetir la casella aleshores: $C_{64}^3=\frac{64 \cdot 63 \cdot 62}{3 \cdot 2 \cdot 1}$ b) col·locar tes fitxes diferents en un taulell, és equivalent a triar tres caselles amb ordre i sense repetir la casella aleshores: $V_{64}^3=64 \cdot 63 \cdot 62$

5

Amb les xifres { 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 } es demana: a) possibles nombres de quatre xifres diferents. b) possibles nombres de cinc xifres que comencen per 11. c) possibles nombres de cinc xifres cap i cua. d) possibles nombres de tres xifres múltiples de cinc. e) possibles nombres de tres xifres múltiples de dos.

Sol.

a) V_9^4 b) VR_9^3 c) VR_9^3 d) VR_9^2 e) $4VR_9^2$

6

Amb sis pesos de { 1, 3, 5, 9, 17, 31 }Kg. Quantes pesades diferents podem fer si : a) prenem un sol pes. b) prenem dos pesos. c) prenem tres pesos

Sol.

a) 6 b) 15 c) 20

7

Un autobús té un recorregut amb 10 punts de parada. Si el recorregut es en doble sentit, quants bitllets diferents es poden donar?

Sol. 45

8

Un joc de dominó té 28 fitxes i si es reparteixen entre quatre jugadors, surten a set fitxes per cap. a) demostra que són combinacions amb repetició de set nombres presos de dos en dos. b) trobeu el nombre de maneres diferent de repartir les fitxes entre els quatre jugadors.

RAONAMENT

a)

$$CR_7^2 = C_8^2 = \frac{8 \cdot 7}{2 \cdot 1} = 28 \quad fitxes$$

b)

Es pot considerar una partició de les 28 fitxes en quatre grups de set fitxes cadascun , aleshores:

$PR_{28}^{7,7,7,7}$

També es pot considerar com quatre reparticions una rere l'altra, de set fitxes cadascuna i cada una de les reparticions sense ordre ni repetició, aleshores:

$C_{28}^7 \cdot C_{21}^7 \cdot C_{14}^7 \cdot C_7^7$

9

Deu punts son els vèrtexs d'un polígon convex de deu costats; es demana: a) nombre de segments que uneixen dos dels vèrtexs. b) nombre de diagonals d'aquest polígon. c) nombre de triangles que resulten d'ajuntar tres vèrtexs.

Sol.

a) 45 *b) 35* *c)* C_{10}^3

10

Determineu el nombre de punts d'intersecció de deu rectes si: a) cap és paral·lela i no poden passar tres rectes o més per un mateix punt. b) tres són paral·leles i no poden passar tres rectes o més per un mateix punt. c) tres són paral·leles i tres de les altres passen per un mateix punt.

Sol.

a) 45 *b) 42* *c) 37*

11

Determina el nombre total de barreges que poden fer-se amb sis colors diferents, de la manera següent: a) barrejant-ne dos diferents. b) barrejant-ne tres diferents. c) totes les barreges possibles de diferents colors. d) totes les barreges possibles amb un color fix.

Sol.

a) 15 b) 20 c) 57 d) 33

12

En un destacament de 26 soldats, tenen que fer-se les vigilàncies de 4 en 4. Es demana: a) nombre de vigilàncies possibles. b)de totes aquestes, quantes n'ha de fer un soldat determinat?

RAONAMENT

a) Un destacament de vigilància és una tria sense ordre ni repetició de quatre soldats de un total de 26, aleshores

$$C_{26}^{4} = \frac{26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot 23}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}$$

b) Un destacament de vigilància és una tria sense ordre ni repetició de quatre soldats. Si un d'ells hi té que participar, la tria només és de tres soldats de la resta, aleshores:

$$C_{26-1}^{3} = C_{25}^{3} = \frac{25 \cdot 24 \cdot 23}{3 \cdot 2 \cdot 1}$$

13

Cinc gats persegueixen a cinc ratolins, es demana: a) conteu totes les maneres possibles de poder-ho fer. b) si el gat petit persegueix al ratolí petit, maneres de fer-ho. c) un dels gats no hi participa. d) un dels ratolins s'amaga.

Sol.

a) 5^5 b) 4^4 c) 5^4 d) 4^5

14

Indica les maneres diferents d'alinear-se: a) quatre persones. b) un nombre genèric (n) de persones.

Sol.

a) 4! *b) n!*

15

Indica les maneres diferents de seure en una taula rodona: a) quatre persones. b) un nombre genèric (n) de persones.

Sol.

a) 3! *b) (n - 1)!*

16

Un destacament té 5 oficials, 15 suboficials i 150 soldats. Cada dia surt una patrulla formada per: 1 oficial, 2 suboficials, i 10 soldats; es demana: a)nombre total de patrulles diferents. b) nombre total de patrulles diferents si: dos oficials, tres suboficials i 16 soldats cauen malalts.

RAONAMENT

a)

Dintre de cada categoria de oficials,suboficials o soldats la tria és sense ordre ni repetició aleshores una combinació. Per formar una patrulla triarem ordenadament els tres grups, aleshores tindrem: un producte de combinacions.

$C_{5}^{1} \cdot C_{15}^{2} \cdot C_{150}^{10}$

b)

Dintre de cada categoria de oficials,suboficials o soldats la tria és sense ordre ni repetició aleshores una combinació. Per formar una patrulla triarem ordenadament els tres grups, aleshores *tindrem: un producte de combinacions.*

$C^{1}_{5-2}\cdot C^{2}_{15-3}\cdot C^{10}_{150-16}$

17

Donats els dígits: {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7} calculeu: a) nombres de quatre xifres diferents. b) nombres de cinc xifres diferents que comencen per set. c) suma de tots els nombres de tres xifres diferents.

Sol. a) V_7^4 *b)* V_6^4 *c)* $S=30(1+2+3+.+7)(100+10+1)=93.240$

18

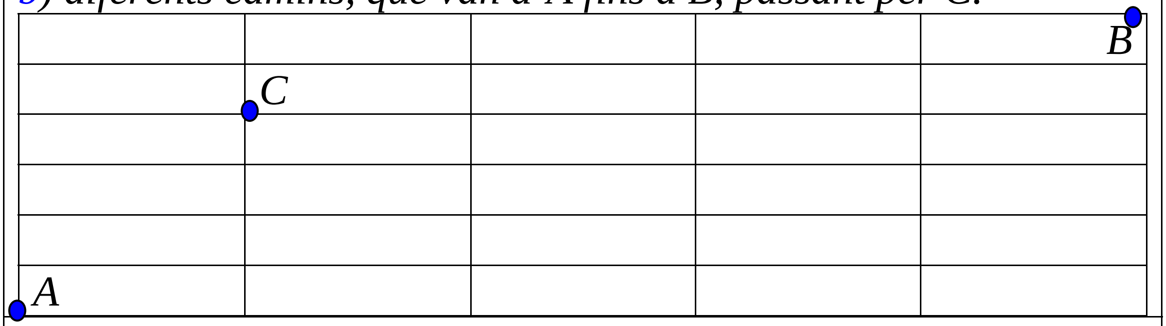
Un grup de 90 persones es vol repartir en tres grups, contesteu: a) nombre de persones de cada grup si el repartiment és directament proporcional a {2,3,4}. b) diferents maneres de fer-ho.

Sol.

a) 20, 30, 40, *b)* $PR_{90}^{20,30,40}=C^{20}_{90}\cdot C^{30}_{70}\cdot C^{40}_{40}$

19

En un entramat de carrers, com indica la figura, es demana :
a) diferents camins, de recorregut mínim, que van d'A fins a B.
b) diferents camins, que van d'A fins a B, passant per C.



Sol.

a) C_{11}^{5}	b) $C_{5}^{1}C_{6}^{2}$

20

D'un conjunt d'x persones es poden formar 91 grups binaris sense ordre ni repetició. Trobeu el valor d'x.

RAONAMENT

Els grups sense ordre ni repetició són combinacions aleshores:

$C_x^2 = 91$

$$\frac{x(x-1)}{2} = 91 \quad \rightarrow \quad x(x-1) = 182 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x = 14 & si \\ x = -13 & no \end{cases}$$

21

Resoleu les següents equacions:

a) $4V_x^3 = 5V_{x-1}^3$

b) $8V_x^4 = V_x^5$

c) $2C_x^3 = V_x^2$

d) $C_x^3 = 35(x-2)$

e) $V_x^2 - C_x^2 = 190$

f) $V_x^2 \cdot C_x^2 = 450$

g) $C_x^3 + C_{x+1}^3 = \dfrac{57x}{2}$

h) $V_x^2 + V_{x-2}^2 + V_{x-4}^2 = 98$

Sol.

a) 15 b) 12 c) 3 d) 15 e) 20 f) 6 g) 10 h) 8

22

Resoleu les següents equacions:

a) $16\binom{x}{2} + 24\binom{x}{3} = 168x$

b) $\binom{10}{3} = \binom{10}{x}$

c) $\binom{2x}{23} = \binom{2x}{9}$

d)

e)

f)

$\binom{3x-1}{10}=\binom{3x-1}{16}$ $\binom{16}{5}=\binom{16}{x+8}$ $\binom{12}{x+1}=\binom{12}{3x-1}$

g) $\binom{8}{x+4}=\binom{8}{2x-1}$

h) $\binom{3}{1}+\binom{3}{2}=\binom{4}{x}$

i) $\binom{3x}{2}+\binom{6}{3}=\binom{7}{3}$

j) $\binom{9}{3}+\binom{x}{2}=\binom{10}{3}$

k) $\binom{x}{x-1}+\binom{x}{x-2}=\binom{8}{6}$

l) $\binom{12}{x+4}-\binom{11}{x+4}=\binom{11}{6}$

Sol.

a)	b) 3 i 7	c) 21	d) 9	e) 3	f) 3
g) cap	h) 2	i) 2	j) 9	k) 7	l) 3

23

Simplifiqueu:

a) $\frac{11!}{5!}$ b) $\frac{11!}{4!7!}$ c) $\frac{x!}{(x-2)!}$ d) $\frac{x!}{(x-2)!2!}$

Sol.

a)	b)	c)	d)
$11\cdot 10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6$	$11\cdot 10\cdot 9\cdot 2$	$x(x-1)$	$x(x-1)/2$

24

Determineu el nombre x de plans que es tallen en 20 punts si sempre tres d'ells determinen un punt.

RAONAMENT

La tria de tres plans sense ordre i diferents determinen un punt, aleshores cada punt és una de les combinacions d'x plans triats de tres entres. Això implica:

$$C_x^3 = 20 \quad \rightarrow \quad \frac{x(x-1)(x-2)}{6} = 20 \quad \rightarrow \quad x^3-3x^2+2x=120$$

6		6	18	120
	1	3	20	0

$\rightarrow \quad (x - 6)(x^2+3x+120)=0$

$$\rightarrow \begin{cases} x = 6 \\ x^2 + 3x + 20 = 0 \rightarrow cap \end{cases}$$

25

Quants quadrilàters es poden formar amb els vèrtexs d'un pentàgon regular?

Sol: $C_5^4 = 5$

26

Un entrenador disposa de 22 jugadors per formar un equip de futbol, quantes alineacions diferents d'11 jugadors es poden formar?

Sol: $C_{22}^{11} = 705432$

27

Uns pares i els seus tres fills van al cinema i ocupant cinc seients, a) de quantes maneres poden fer-ho. b) de quantes maneres poden fer-ho si els fills seuen al mig? c) de quantes maneres poden fer-ho si cap dels pares seu en un extrem?

Sol:

a) $P_5 = 120$ b) $2 \cdot P_3 = 12$ c) $V_3^2 \cdot P_3 = 36$

28

De quantes maneres es poden triar tres assignatures de 6 optatives?

RAONAMENT

Per triar tres assignatures de sis, cal fer-ho sense ordre i sense repetició, aleshores: $C_6^3 = \dfrac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 20$ *possibilitats*

29

Amb els nombres { 3, 5, 7, 9, 11 }, a) quants productes diferents de dos termes es poden formar? b) quants d'ells són múltiples de 2? c) quants quocients diferents es poden formar amb dos d'ells

Sol:

a) $C_5^2 = 10$ *b)* $C_4^1 = 4$ *c)* $V_5^2 = 20$

30

Quants resultats diferents es poden obtenir al llançar un dau quatre vegades?

Sol: $VR_6^4 = 1296$

31

Quants nombres entre 2000 i 3000 tenen les seves xifres diferents?

Sol: $V_9^3 = 504$

32

A l'alfabet Morse s'utilitzen punts i comes, amb quatre d'aquest signes com a màxim, trobeu el nombre de paraules diferents que es poden formar.

RAONAMENT

Una paraula d'n signes consta d'una successió ordenada de punts i ratlles, aleshores és un grup ordenat de dos elements presos d'n *en n amb possible repetició.* $\rightarrow \quad VR_2^n = 2^n$

Total de paraules = $VR_2^1 + VR_2^2 + VR_2^3 + VR_2^4 = 2 + 4 + 8 + 16 = 30$

33

Un vaixell disposa de 10 banderes diferents per fer les senyals i una senyal es fa amb quatre banderes alineades al pal. Trobeu el nombre total de possibles senyals.

Sol: $V_{10}^{4} = 4320$

34

A una reunió assisteixen 20 persones, d'elles 6 només parlen anglès i 14 només alemany. Es formen 10 grups binaris i tothom conversa animadament. Trobeu el nombre de possibles maneres de aparellar-se.

Sol: $C_6^{2} \cdot C_{14}^{2}$

35

En una cafeteria hi ha 10 tipus de cafè i cinc persones demanen un cafè. De quantes maneres poden fer-ho?

Sol: $VR_{10}^{5} = 100.000$

36

Amb les xifres {1, 2, 3} trobeu: a) diferents nombres de sis xifres. b) dels anteriors aquells que contenen les tres xifres.

RAONAMENT

a)

Un nombre qualsevol és un grup ordenat amb possible repetició *de les seves xifres. Si només podem utilitzar els dígits 1,2,3 aleshores* $\rightarrow$ $VR_3^6 = 3^6 = 729$

b)

Els que només tenen una xifra $\rightarrow$ $3 \cdot VR_1^6 = 3$

Els que tenen dues xifres $\rightarrow$ $C_3^2 \cdot (VR_2^6 - 2) = 3 \cdot 62 = 186$

Els que contenen les tres xifres $\rightarrow$ $729 - 186 - 3 = 540$

37

Un nombre x de rectes no paral·leles dos a dos i tres no concurrents amb un punt , determinen 21 punts d'intersecció. Calculeu el nombre total de rectes.

Sol: x=7

38

Totes les persones assistents a una reunió se saluden entre ells donant-se un petó, Si en total foren 105 petons, quantes persones hi havia a la reunió?

Sol: 15

39

Calculeu el nombre de triangles diferents que poden formar-se amb 10 punts on tres qualsevol d'ells no poden estar alineats.

Sol: $C_{10}^3 = 120$

40

De quantes maneres poden seure tres persones en sis cadires afilerades ?

RAONAMENT

Col·locar tres persones en sis cadires és equivalent a triar tres cadires amb ordre i sense repetició de les sis disponibles, aleshores $\rightarrow$ $V_6^3 = 6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$

41

Amb els números { 2, 5, 7, 9 } conteu : a) tots els nombres de tres xifres. b) els nombres de tres xifres diferents. c) els nombres de quatre xifres diferents. d) els nombres parells de tres xifres diferents.

Sol:

a) 64 *b) 24* *c) 24* *d) 6*

42

Calcula el nombre de travesses diferents amb 15 caselles i tres possibles resultats.

Sol: 14.348.907

43

Calcula el nombre de primitives diferents d'un total de 49 caselles on hem de marcar-ne sis.

Sol: 13.983.816

44

Resoleu les següents equacions:

a) $V_x^3 - 5V_x^2 = 0$

b) $10P_x + 4P_{x+1} = P_{x+2}$

c) $C_x^3 = C_{x-1}^4$

d) $P_4 \cdot C_x^3 = 2P_3 \cdot V_x^2$	e) $C_x^2 + C_{x-1}^2 + C_{x-2}^2 = 85$	f) $V_x^3 = C_x^4$

RAONAMENT

a)

$$\begin{cases} V_x^3 - 5V_x^2 = 0 \\ x \geq 3 \end{cases} \rightarrow \frac{x(x-1)(x-2)}{6} = 5\frac{x(x-1)}{2} \rightarrow x-2 = 15$$

$$\rightarrow \begin{cases} x = 17 \\ x \geq 3 \end{cases} \rightarrow x = 17$$

b)

$$\begin{cases} 10P_x + 4P_{x+1} = P_{x+2} \\ x \geq 0 \end{cases} \rightarrow P_x[10+4(x+1)] = P_x[(x+2)(x+1)] \rightarrow$$

$$(x-2)(x+1) = 10 \rightarrow x^2 - x - 12 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = 4 \end{cases} \rightarrow x=4$$

c)

$$\begin{cases} C_x^3 = C_{x-1}^4 \\ x \geq 5 \end{cases} \rightarrow \frac{x(x-1)(x-2)}{6} = \frac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}{24}$$

$$\rightarrow \frac{x}{6} = \frac{(x-3)(x-4)}{24} \rightarrow x^2 - 11x + 12 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 11 \\ x = no \end{cases}$$

d)

$$\begin{cases} P_4 \cdot C_x^3 = 2 \cdot P_3 \cdot V_x^2 \\ x \geq 3 \end{cases} \rightarrow$$

$$2 \cdot C_x^3 = V_x^2 \rightarrow 2\frac{x(x-1)(x-2)}{6} = x(x-1) \rightarrow \begin{cases} x-2 = 3 \\ x \geq 3 \end{cases} \rightarrow x = 5$$

e)

$$\begin{cases} C_x^2 + C_{x-1}^2 + C_{x-2}^2 = 85 \\ x \geq 4 \end{cases} \rightarrow x(x-1) + (x-1)(x-2) + (x-2)(x-3) = 170$$

$$\rightarrow x^3 - 3x - 54 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 9 \\ x = -6 no \end{cases}$$

f)

$$\begin{cases} V_x^3 = C_x^4 \\ x \geq 4 \end{cases} \qquad V_x^3 = x(x-1)(x-2) \qquad C_x^4 = \frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{24}$$

$$\rightarrow\ 1 = \frac{x-3}{24} \quad \rightarrow \quad x=27$$

45

En una comunitat de 10 propietaris hem de triar un president i un vicepresident. Trobeu les diferents formes de fer-ho.

Sol: $V_{10}^{2} = 90$

46

Possibilitats de triar de cop tres regals de sis regals diferents.

Sol: $C_{6}^{3} = 20$

47

Conteu totes les ordenacions de la paraula SOBRE.

Sol: $P_5 = 120$

48

Vuit amics decideixen llogar dos cotxes A, B i seure quatre en cada cotxe sense tenir en compte el número del seient. De quantes maneres poden fer-ho si: a) Tots poden conduir. b) Només tres poden conduir.

RAONAMENT

a) Primer triem els conductors $\rightarrow\ V_8^2 = 8 \cdot 7 = 56$

Partim la resta en dos grups de tres $\rightarrow\ PR_6^{3,3} = C_6^3 \cdot C_3^3 = 20$

Total $\rightarrow\ 56 \cdot 20 = 1120$

b) Primer triem els conductors $\rightarrow\ V_3^2 = 3 \cdot 2 = 6$

Partim la resta en dos grups de tres $\rightarrow\ PR_6^{3,3} = C_6^3 \cdot C_3^3 = 20$

Total $\rightarrow$ $6 \cdot 20 = 120$

49

En una carrera hi participen 10 cavalls, si una aposta consisteix en encertar el primer el segon i el tercer guanyador i en aquest ordre, trobeu el nombre de totes les possibles apostes.
Sol: $V_{10}^{3} = 720$

50

En un prestatge hi ha 6 llibres de matemàtiques i 3 de física, volem triar-ne 2 de cada. Conteu totes les maneres de fer-ho.
Sol: $C_6^2 . C_3^2 = 45$

51

En una classe de 20 alumnes es vol repartir 3 premis diferents. Trobeu el nombre de maneres de fer-ho.
Sol: $VR_{20}^{3} = 8.000$

52

Resoleu les següents equacions:

a)	b)	c)	d)
$V_x^4 = 12 \cdot V_x^2$	$V_x^1 + V_x^2 + V_x^3 = 17x$	$VR_x^2 + 5VR_{x-2}^2 = 70$	$VR_x^2 - VR_{x-1}^2 = 9$

RAONAMENT

a)

$$\begin{cases} V_x^4 = 12 \cdot V_x^2 \\ x \geq 4 \end{cases} \rightarrow x(x-1)(x-2)(x-3) = 12x(x-1) \rightarrow x^2 - 5x - 6 = 0$$

$$x = \begin{cases} 6\, si \\ -1 no \end{cases}$$

b)

$$\begin{cases} V_x^1 + V_x^2 + V_x^3 = 17x \\ x \geq 3 \end{cases} \rightarrow x + x(x-1) + x(x-1)(x-2) = 17x \rightarrow$$

$$x^2 - 2x - 15 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 5 \\ x = -3 no \end{cases}$$

c)

$$\begin{cases} VR_x^2 + 5VR_{x-2}^2 = 70 \\ x \geq 2 \end{cases} \rightarrow x^2 + 5(x-2)^2 = 70 \rightarrow 6x^2 - 20x - 50 = 0 \rightarrow$$

$$x = \begin{cases} 5 \\ -\frac{5}{3} no \end{cases}$$

d)

$$\begin{cases} VR_x^2 - VR_{x-1}^2 = 9 \\ x \geq 1 \end{cases} \rightarrow x^2 - (x-1)^2 = 9 \rightarrow x = 5$$

53

Amb els dígits{ 1, 3, 5, 7 } conteu: a) els nombres de tres xifres diferents. b) els nombres de tres xifres repetides o no.

Sol: a) $V_4^3 = 24$ b) $VR_4^3 = 64$

54

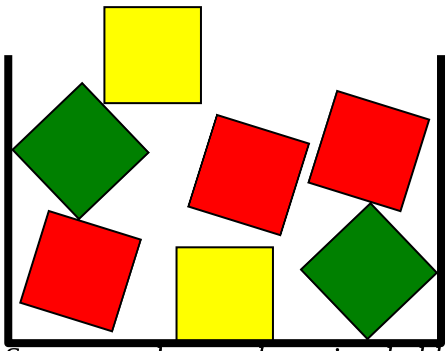
Trobeu el nombre de maneres de seure 5 persones: a) en una filera de 5 cadires. b) en una filera de 6 cadires. c) en una taula rodona de 5 cadires. d) en una taula rodona de 6 cadires

Sol: *a) 5!* *b)* V_6^5 *c) 4!* *d) 5!*

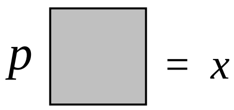
PROBABILITAT

NIVELL1 **NIVELL2**

Experiment simple: triar un quadrat i analitzar el seu color.

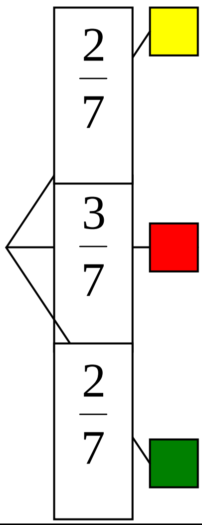


Successos elementals equiprobables al triar qualsevol quadrat

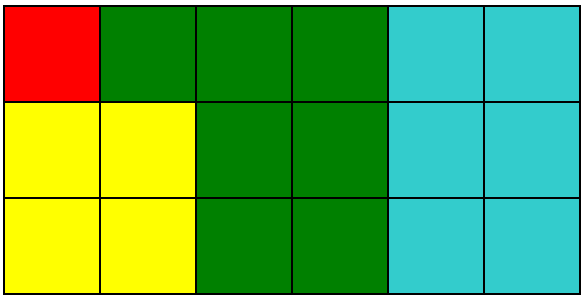


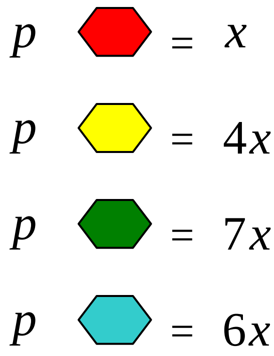
$$7x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{7}$$

$$\boxed{p(color) = \frac{casos\_favorables}{casos\_possibles}}$$



Experiment simple: llançar una fletxa a l'atzar i analitzar el color seleccionat.





Successos elementals NO equiprobables respecte al color i Sí equiprobables respecte a cada quadrat de la mateixa àrea

$$\boxed{x + 4x + 7x + 6x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{18}}$$

Experiment compost: llançar un dau dues vegades i analitzar la suma dels resultats.

	⚀	⚁	⚂	⚃	⚄	⚅
⚀	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
⚁	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
⚂	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
⚃	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
⚄	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
⚅	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

$$\boxed{p(suma) = \frac{casos\_favorables}{casos\_possibles}}$$

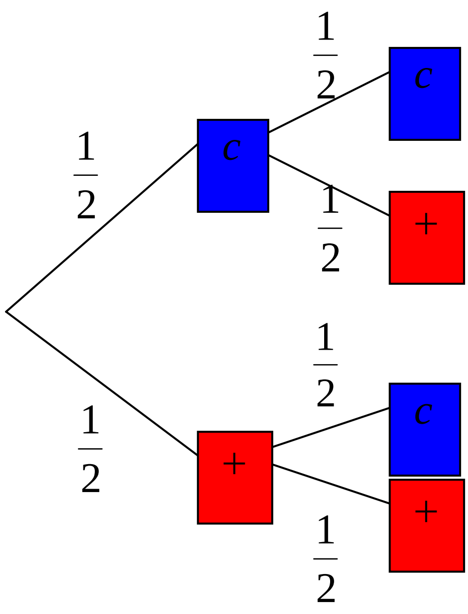
Successos elementals equiprobables respecte a cada un dels 36 resultats possibles

$$p(S=2) = p(S=12) = \frac{1}{36} \qquad p(S=3) = p(S=11) = \frac{2}{36}$$

$$p(S=4) = p(S=10) = \frac{3}{36} \qquad p(S=5) = p(S=9) = \frac{4}{36}$$

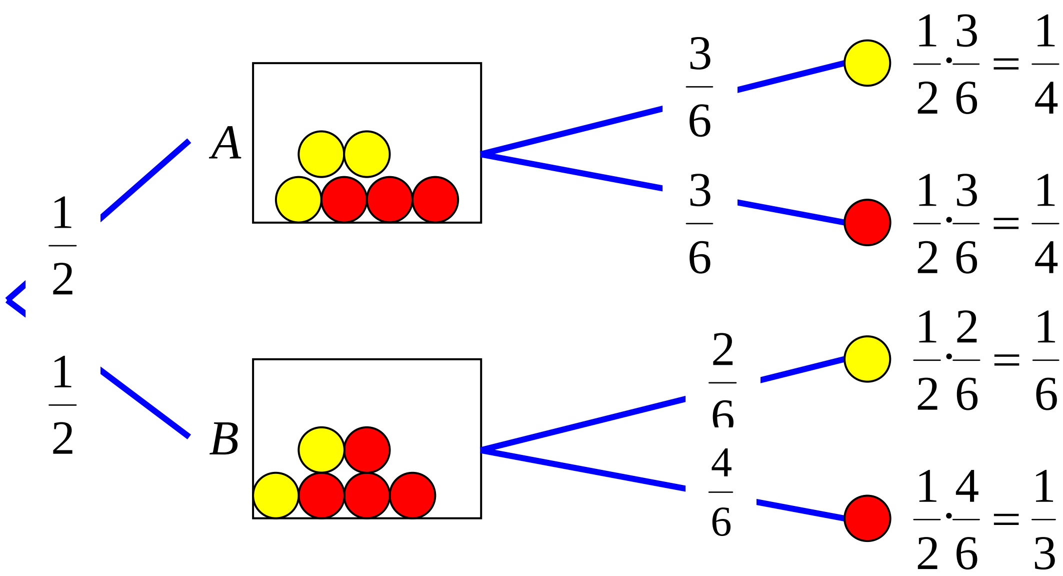
$$p(S=6) = p(S=8) = \frac{5}{36} \qquad p(S=7) = \frac{1}{36}$$

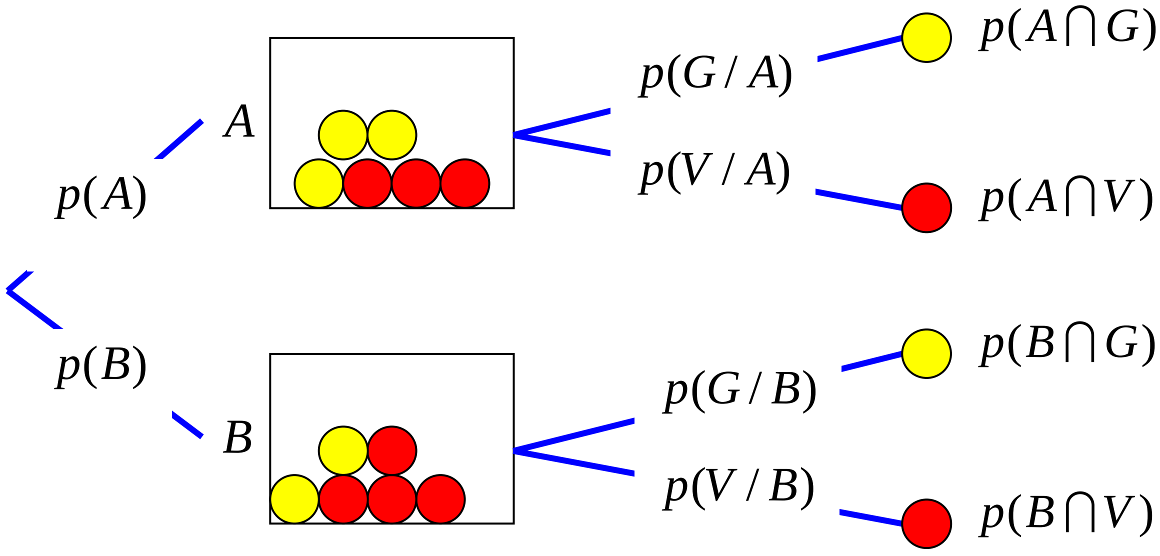
Experiment compost: llançar una moneda dues vegades i analitzar els resultats amb les seves probabilitats.



Experiment compost: seleccionar una urna A o B i triar una bola per analitzar el seu color G o V.

a) Sense cap condició





Probabilitat Condicionada

$$p(A \cap G) = p(A)\ p(G/A) \qquad p(G/A) = \frac{p(A \cap G)}{p(A)}$$

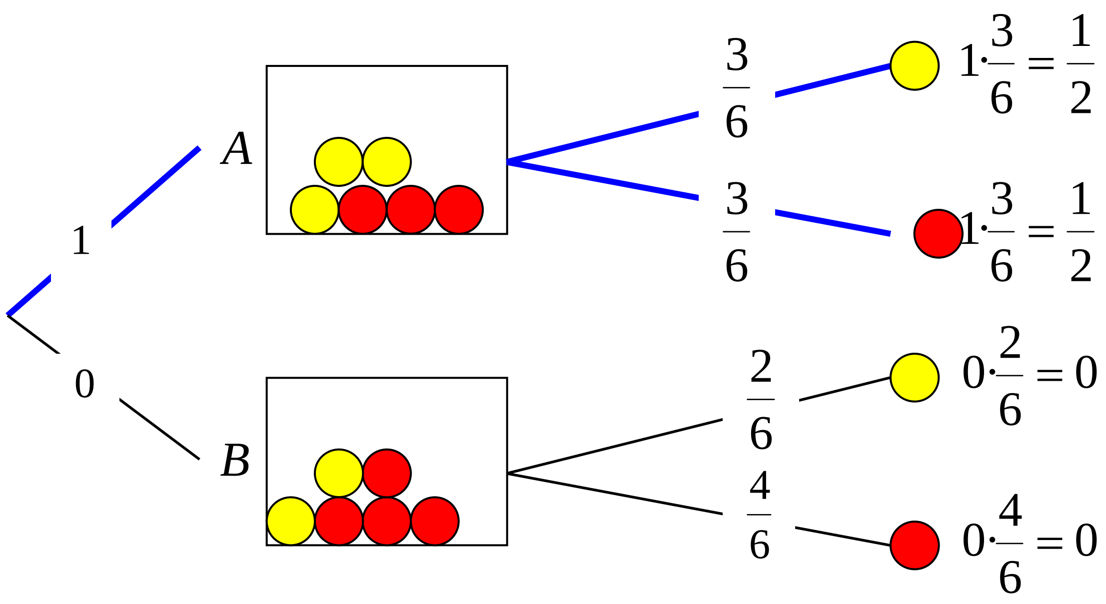
$$p(A \cap V) = p(A)\ p(V/A) \qquad p(V/A) = \frac{p(A \cap V)}{p(A)}$$

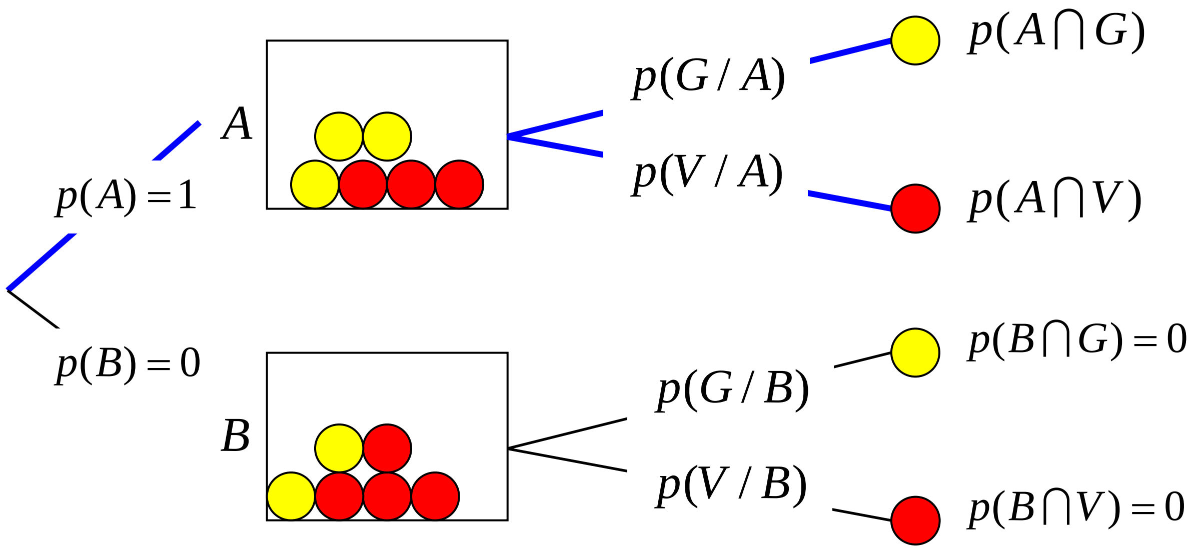
Probabilitat Total

$$p(G) = p(A \cap G) + p(B \cap G)$$

$$p(V) = p(A \cap V) + p(B \cap V)$$

b) Si se sap que s'ha complert A

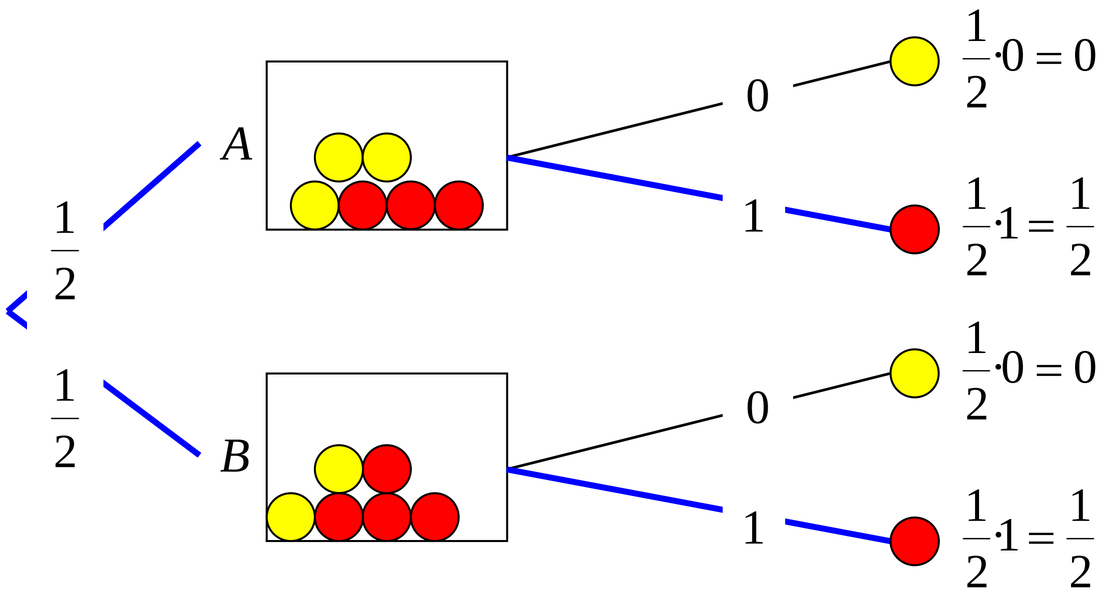


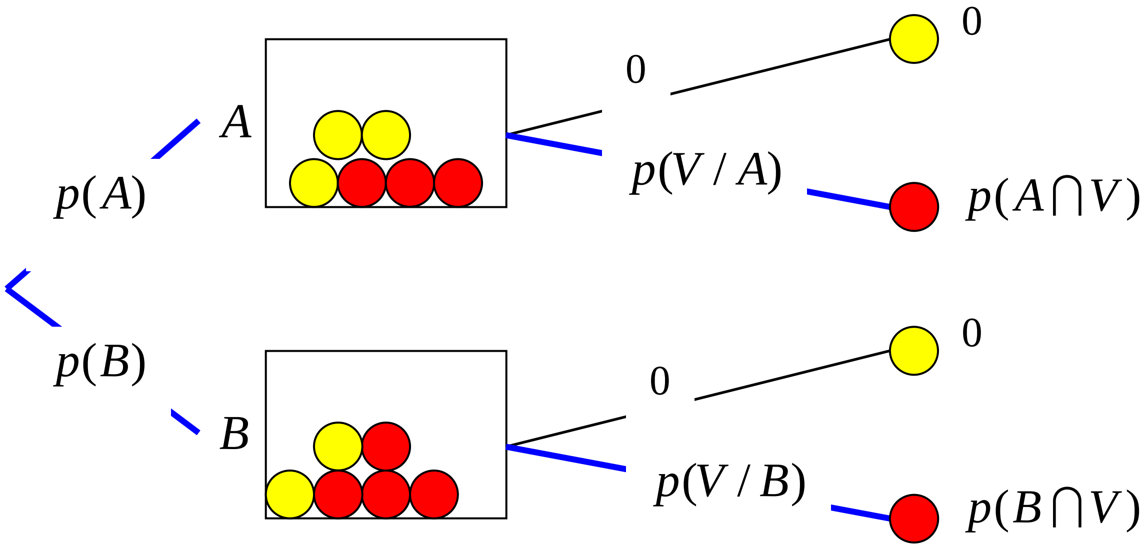


$p(G) = p(G/A) = p(G \cap A)$ $\qquad$ $p(V) = p(V/A) = p(V \cap A)$

---

c) Si se sap que ha sortit vermell





Teorema de Bayes

$$p(A/V) = \frac{p(A \cap V)}{p(A \cap V) + p(B \cap V)} = \frac{p(A)\cdot p(V/A)}{p(A)\cdot p(V/A) + p(B)\cdot p(V/B)}$$

$$p(B/V) = \frac{p(B \cap V)}{p(A \cap V) + p(B \cap V)} = \frac{p(B)\cdot p(V/B)}{p(A)\cdot p(V/A) + p(B)\cdot p(V/}$$

NIVELL 1 EXERCICIS

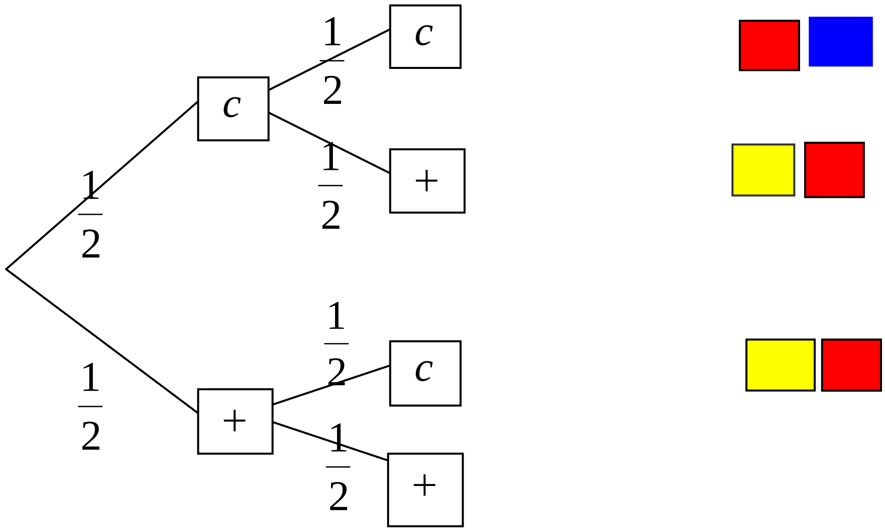
1.1 Monedes i daus

1.1.1

Llancem dues monedes una rere l'altra, calculeu la probabilitat de:

a) Una sola cara b) Al menys una cara c) Dues cares

RAONAMENT



$a)\ \ p(c\cap +)+p(+\cap c)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

$b)\ 1-p(+\cap +)=1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{4}$

$c)\ \ p(c\cap c)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$

1.1.2

Es llancen dos daus, calculeu la probabilitat de: a) que la suma sigui nombre parell. b) que la suma sigui superior a deu. c) que la suma sigui múltiple de 3.

RAONAMENT

Tirades

1-1	1-2	1-3	1-4	1-5	1-6
2-1	2-2	2-3	2-4	2-5	2-6
3-1	3-2	3-3	3-4	3-5	3-6
4-1	4-2	4-3	4-4	4-5	4-6
5-1	5-2	5-3	5-4	5-5	5-6
6-1	6-2	6-3	6-4	6-5	6-6

Suma de cares

2	3	4	5	6	7
3	4	5	6	7	8
4	5	6	7	8	9
5	6	7	8	9	10
6	7	8	9	10	11
7	8	9	10	11	12

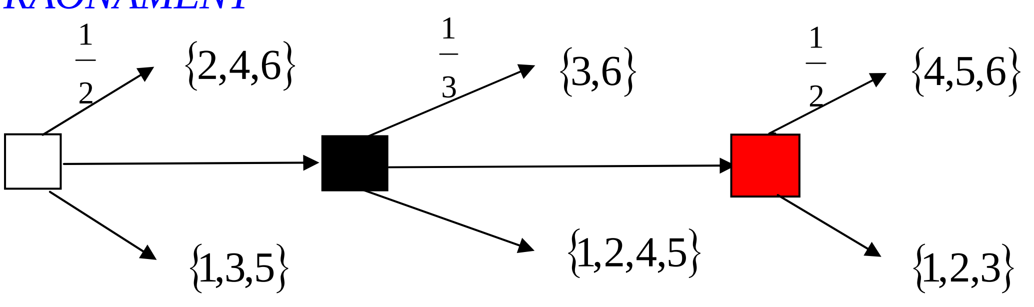
a) $p(S = \dot{2}) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$ b) $p(S > 10) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$

c) $p(S = \dot{3}) = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}$

1.1.3

Es llancen tres daus: un blanc, un negre i un de vermell, calculeu la probabilitat de que surti al mateix temps: parell en el blanc, múltiple de 3 en el negre i més gran que 3 en el vermell.

RAONAMENT



$$p = p(\dot{2}/B)\cdot p(\dot{3}/N)\cdot p(>3/V) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{12}$$

1.1.4

Un jugador llença tres monedes, si surten tres cares guanya 5 €, si surten 2 cares guanya 2€ , si surt una cara guanya 1€, i si surten tres creus perd 10€. Calculeu els guanys o les pèrdues esperades.

RAONAMENT

E=p(3cares)·(5€)+p(2cares)·(2€)+ p(1cara)·(1€)+ p(0cares)(-10€)

$E=\frac{1}{8}(5€)+\frac{3}{8}(2€)+\frac{3}{8}(1€)+\frac{1}{8}(-10€)$ = *0'5 €*

Tenim l'esperança de guanyar 0'5 € de promig per jugada.

1.1.5

Llancem dues monedes una rere l'altra, calculeu la probabilitat de: a) treure una sola cara. b) almenys una cara. c) dues cares.

Sol: a) 1/4   b) 3/4   c) 1/4

1.1.6

Es llença un dau dues vegades, calculeu la probabilitat de: a) que la suma sigui més gran que 6. b) que la suma sigui menor que 10. c)que la suma sigui compresa entre 6 i 10. d) obtenir dos nombres senars. e) obtenir almenys un parell.

Sol: a) 7/12   b) 11/12   c) 5/12   d) 1/4   e) 3/4.

1.1.7

Es llencen dos daus, calculeu la probabilitat de treure dues cares iguals.

Sol: 1/6

1.1.8

Es llença un dau tres vegades, calculeu la probabilitat de treure almenys un sis.

Sol: 91/216

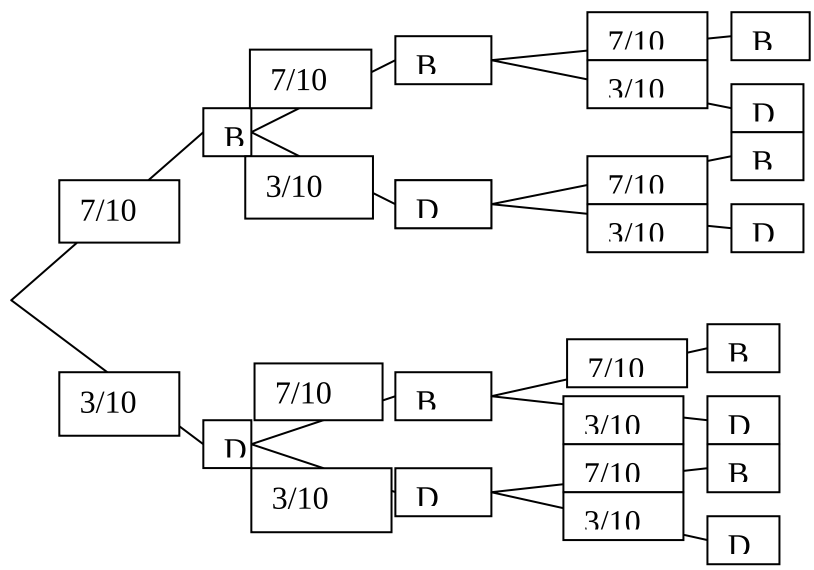
1.2. Articles defectuosos

1.2.1

En un lot de deu articles, tres són defectuosos. Es pren a l'atzar tres articles un rere l'altre, trobeu la probabilitat de que tots siguin bons.

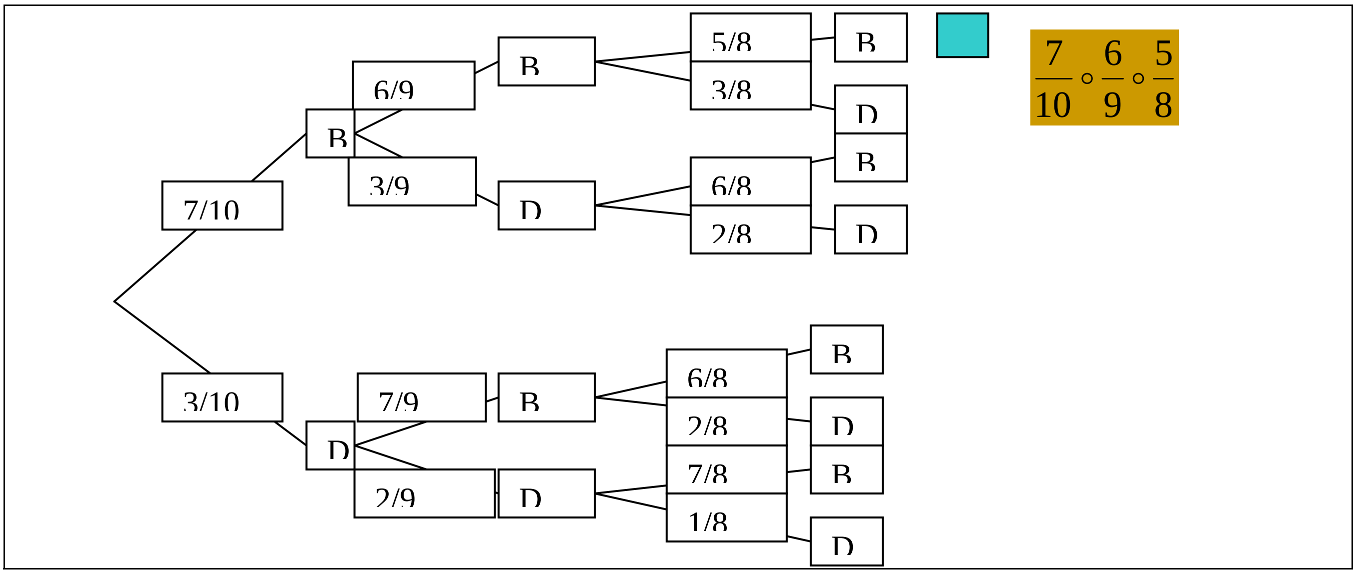
RAONAMENT

a)amb retorn



$$\frac{7}{10} \circ \frac{7}{10} \circ \frac{7}{10}$$

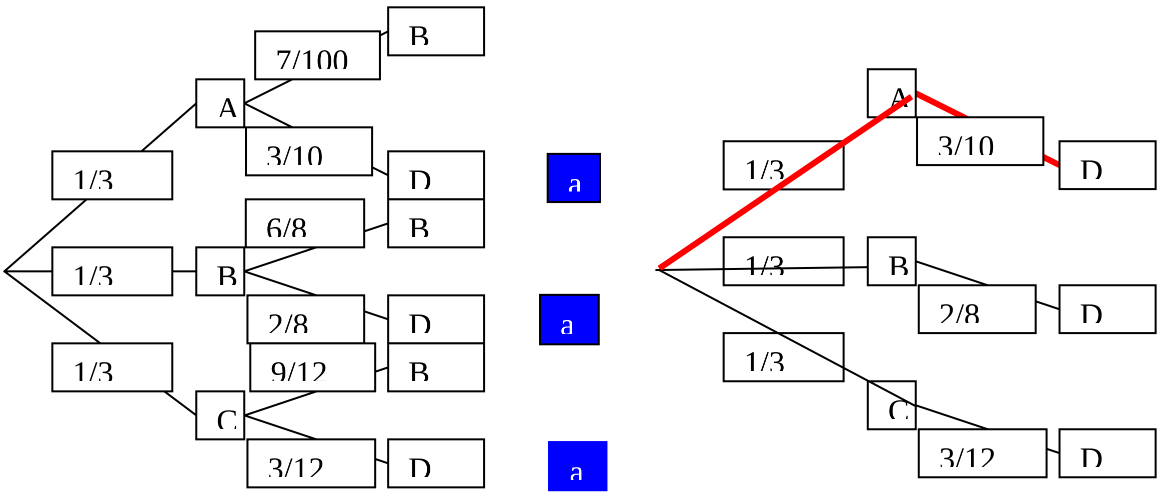
b) sense retorn



1.2.2

La caixa A té 10 bombetes on 3 són defectuoses, la caixa B té 8 bombetes on 2 són defectuoses i la caixa C té 12 bombetes on 3 són defectuoses. Si triem una caixa a l'atzar i de la caixa una bombeta, calculeu: a) probabilitat de que la bombeta no funcioni, b) si la bombeta no funciona, quina és la probabilitat de que pertanyi a la caixa A?

RAONAMENT



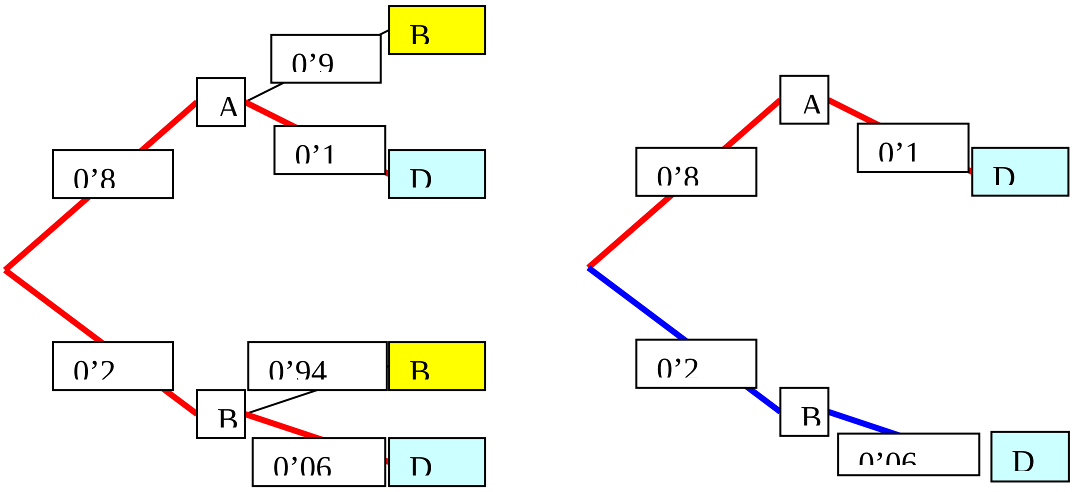
$$a)\ \ p(D)=\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{10}+\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{8}+\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{12}=\frac{4}{15}$$

$$b)\ \ p(A/D)=\frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{10}}{p(D)}=\frac{\frac{1}{10}}{\frac{4}{15}}=\frac{3}{8}$$

1.2.3

De totes les peces que produeix una fàbrica el 80% són produïdes per la màquina A i la resta per la màquina B, se sap que el 10% d'A i el 6% de B són defectuoses; es tria una peça a l'atzar i es demana: a) probabilitat de que sigui defectuosa, b) si se sap que la peça és defectuosa, probabilitat de que provingui de la màquina A.

RAONAMENT



a) $p(D) = p(A \cap D) + p(B \cap D) = 0'8 \cdot 0'1 + 0'2 \cdot 0'06 = 0{,}092$

b) $p(A/D) = \dfrac{p(A \cap D)}{p(D)} = \dfrac{0'8 \cdot 0'1}{0'092} = 0'87$

1.2.4

El 3% i el 5%, respectivament, de les peces produïdes per les màquines X i Y són defectuoses. Es tria una peça de cada màquina i es demana: a) probabilitat de que les dues siguin defectuoses, b) probabilitat d'almenys una defectuosa.

Sol: a) 0,0015 b) 0,0785

1.2.5
Una fàbrica produeix tres components A, B i C. La probabilitat de que un dels components sigui defectuós és respectivament 0’03 , 0’02 i 0’01. i si falla una peça la joguina no funciona, es demana: a) si una primera joguina utilitza les tres peces A,B i C, quina és la probabilitat de que una d’aquestes joguines no funcioni? b)si un altra joguina consta de dos components A i B, quina és la probabilitat de que no funcioni?
Sol: a) 0,059 b) 0,078

1.2.6
Al comprar un determinat producte en uns grans magatzems, es pot triar un regal A o B. El 35% dels visitants trien A, el 25% trien el B i el 40% no compra el producte. Se sap que el 80% dels que trien A, el 40% dels que trien B i el 20% dels que no el compren, son dones. Triat a l’atzar un visitant, quina és la probabilitat de que sigui dona?
Sol: 0,46

1.2.7
La caixa A conté 10 bombetes on 3 son defectuoses, la caixa B té 8 bombetes on 2 són defectuoses, la caixa C conté 12 bombetes on 3 són defectuoses. Es tria una caixa i una bombeta d’aquesta caixa, calculeu: a) probabilitat de defectuosa. b) si la bombeta resulta defectuosa, quina és la probabilitat de que procedeixi de la caixa A?
Sol: a) 4/15 b) 3/8

1.3. Urnes i cartes

1.3.1

D'una baralla espanyola (40 cartes) es treuen dues cartes sense retorn. Calculeu la probabilitat de: a) dos asos. b) la primera un as i la segona un tres. c) un as i un tres. d) dos oros. e) del mateix pal.

RAONAMENT

a) $p(A \cap A) = \frac{4}{40} \cdot \frac{3}{39} = \frac{1}{130}$

b) $p(A \cap 3) = \frac{4}{40} \cdot \frac{4}{39} = \frac{2}{195}$

c) $p(A \cap 3) + p(3 \cap A) = 2 \cdot \frac{4}{40} \cdot \frac{4}{39} = \frac{4}{195}$

d) $p(O \cap O) = \frac{10}{40} \cdot \frac{9}{39} = \frac{3}{52}$

e) $p(\text{mateix pal}) = 4\, p(O \cap O) = 4 \cdot \frac{10}{40} \cdot \frac{9}{39} = \frac{3}{13}$

1.3.2

Una urna té 3 boles blanques i 2 negres, s'extreuen dues boles una rere l'altra amb retorn i es demana la probabilitat: a) de dues boles negres, b) d'una bola de cada color, c) de dues boles blanques

RAONAMENT

a) $p(N \cap N) = \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{4}{25}$

b) $p(B \cap N) + p(N \cap B) = 2 \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{12}{25}$

c) $p(B \cap B) = p(B) \cdot p(B/B) = \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{9}{25}$

1.3.3

En una bossa hi ha 7 boles blanques i 3 negres, si es fa una extracció de 4 boles de cop, calculeu la probabilitat de que totes siguin blanques.
Sol: 1/6

1.3.4

Una bossa té 6 boles blanques i 5 de negres. S'extreuen 4 boles de cop i es demana la probabilitat de que no totes siguin blanques.
Sol: 21/22

1.3.5

Una bossa té 6 boles blanques i 5 de negres. S'extreuen 4 boles de cop i es demana: a) probabilitat de quatre blanques, b) probabilitat de quatre negres.

RAONAMENT

a)

$$p(B \cap B \cap B \cap B) = p(B) \cdot p(B/B) \cdot p(B/B \cap B) \cdot p(B/B \cap B \cap B)$$

$$= \frac{6}{11} \cdot \frac{5}{10} \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{8} = \frac{1}{22}$$

b)

$$p(N \cap N \cap N \cap N) = p(N) \cdot p(N/N) \cdot p(N/N \cap N) \cdot p(N/N \cap N \cap N)$$

$$= \frac{5}{11} \cdot \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9} \cdot \frac{2}{8} = \frac{1}{66}$$

1.3.6

D'una baralla de 40 cartes s'extreuen tres cartes amb les condicions: (amb retorn; sense retorn) . Trobeu en cada cas les probabilitats següents: a) treure al menys un as. b) treure tres oros , c) treure només un oros. d) no treure cap as. e) les tres del mateix pal .

RAONAMENT

	Amb retorn	Sense retorn
a)	$1-p(\overline{A}\cap\overline{A}\cap\overline{A})=$ $1-\frac{36}{40}\cdot\frac{36}{40}\cdot\frac{36}{40}=\frac{271}{1000}$	$1-p(\overline{A}\cap\overline{A}\cap\overline{A})=$ $1-\frac{36}{40}\cdot\frac{35}{39}\cdot\frac{34}{38}=\frac{137}{494}$
b)	$p(O\cap O\cap O)=$ $\frac{10}{40}\cdot\frac{10}{40}\cdot\frac{10}{40}=\frac{1}{64}$	$p(O\cap O\cap O)=$ $\frac{10}{40}\cdot\frac{9}{39}\cdot\frac{8}{38}=\frac{3}{247}$
c)	$3\,p(O\cap\overline{O}\cap\overline{O})=$ $3\cdot\frac{10}{40}\cdot\frac{30}{40}\cdot\frac{30}{40}=\frac{27}{64}$	$3\,p(O\cap\overline{O}\cap\overline{O})=$ $3\cdot\frac{10}{40}\cdot\frac{30}{39}\cdot\frac{29}{38}=\frac{261}{998}$
d)	$p(\overline{A}\cap\overline{A}\cap\overline{A})=$ $\frac{36}{40}\cdot\frac{36}{40}\cdot\frac{36}{40}=\frac{729}{1000}$	$p(\overline{A}\cap\overline{A}\cap\overline{A})=$ $\frac{36}{40}\cdot\frac{35}{39}\cdot\frac{34}{38}=\frac{357}{494}$
e)	$4\,p(O\cap O\cap O)=$ $4\cdot\frac{10}{40}\cdot\frac{10}{40}\cdot\frac{10}{40}=\frac{1}{16}$	$4\,p(O\cap O\cap O)=$ $4\cdot\frac{10}{40}\cdot\frac{9}{39}\cdot\frac{8}{38}=\frac{12}{247}$

1.3.7

Una bossa conté 6 boles blanques, 3 negres i 9 vermelles. Es trien tres boles a la vegada; es demana que calculeu la probabilitat: a) de dues blanques, b) cap de blanca, c) de diferent color.

RAONAMENT

a) $p(B,B)=\frac{C_6^2}{C_{18}^2}=\frac{6}{18}\cdot\frac{5}{17}=\frac{5}{51}$ b) $p(\overline{B},\overline{B})=\frac{C_{12}^2}{C_{18}^2}=\frac{12}{18}\cdot\frac{11}{17}=\frac{22}{51}$

c) $p(B,N,V)=\frac{6}{18}\cdot\frac{3}{17}\cdot\frac{9}{16}=\frac{9}{272}$

1.3.8

En una baralla de 40 cartes, una persona guanya 5 € si treu una sota o un rei, 2€ si treu un cavall o un as i per les altres opcions ha de pagar 1€. Quina esperança tenim de guanyar?
RAONAMENT $E = \frac{8}{40}5€ + \frac{8}{40}2€ - \frac{24}{40}1€ = 0{,}8 \text{ euros/ partida}$

1.3.9   *Una primera urna conté 3 boles blanques i 5 boles negres. Una segona urna conté 1 blanca i 3 negres. Si s'extreu una bola de cada urna, calculeu la probabilitat de que ambdues siguin negres.*
Sol: 15/32

1.3.10   *Tres tipus d'urnes A,B i C tenen la següent configuració: A (5 blanques i 5 negres) B (8 blanques i 2 negres) C(1 blanca i 4 negres) i es disposa de 5 urnes del tipus A, 3 del tipus B i 2 del tipus C. Es tria una urna i al extreure una bola resulta blanca. Calculeu la probabilitat de que la bola hagi set extreta d'una urna del tipus B.*
Sol: 24/53=0,4528

1.3.11   *Tres urnes A,B i C tenen la següent configuració: A (2 vermelles i 3 grogues); B (3 vermelles i 1 groga) i C (2 vermelles i 4 grogues). Es tria una urna i una bola a l'atzar i resulta vermella. Quina és la probabilitat d'haver triat la urna A.*
Sol: 24/89

1.3.12

D'una baralla de 40 cartes, se'n trien dues successivament i sense retorn. Calculeu la probabilitat de: a) dos asos. b) un as i un tres. c) la primera un as i la segona un tres. d) dos espases. e) dos cartes del mateix pal.

RAONAMENT

a) $p(A,A) = \frac{4}{40} \cdot \frac{3}{39} = \frac{1}{130}$

b) $p(A,3) + p(3,A) = \frac{4}{40} \cdot \frac{4}{39} + \frac{4}{40} \cdot \frac{4}{39} = \frac{4}{195}$

c) $p(A,3) = \frac{4}{40} \cdot \frac{4}{39} = \frac{2}{195}$

d) $p(E,E) = \frac{10}{40} \cdot \frac{9}{39} = \frac{3}{52}$

e) $p(mateix \quad pal) = 4p(oros \cap oros) = 4 \cdot p(oros) \cdot p(oros/oros) = 4 \cdot \frac{10}{40} \cdot \frac{9}{39} = \frac{3}{13}$

1.3.13

En una baralla de 40 cartes s'extreuen tres sense retorn, calculeu la probabilitat de treure dos reis.

Sol: 27/1235

1.3.14

Una urna conté 3 boles blanques i dos negres, s'extreuen dues boles amb retorn. Calculeu la probabilitat: a) de dues boles negres, b) una de cada color, c) de dues blanques.

Sol: a) 4/25 b) 12/25 c) 9/25

1.3.15

Quina és la probabilitat de que al triar tres cartes a la vegada d'una baralla de 40 cartes, ens trobem amb un as i dues cartes iguals.

Sol: 1/247

1.3.16

Quina és la probabilitat de que al triar tres cartes una rere l'altra d'una baralla de 40 cartes, s'obtingui com a resultat: a) tres oros, b) la primera copes la segona espases i la tercera oros, c) les tres de diferent pal.

Sol: a) 3/247 b) 25/1482 c) 100/247

1.3.17

Dues urnes A i B tenen la següent composició: A(5 boles blanques, 5 negres i 5 vermelles) i B(3 blanques, 3 negres i 5 vermelles). Ara es passa una bola de la urna A a la urna B i seguidament es tria una bola de la urna B i resulta ser vermella. Quina és la probabilitat de que la bola en lloc de vermella fos blanca?

Sol: 5/16

1.3.18

Es disposa de dues baralles de 40 cartes cadascuna: a)si triem una carta de cada baralla, calculeu la probabilitat d'obtenir dos asos. b)si mesclem les dues baralles i triem dues cartes, calculeu la probabilitat de treure dos asos.

Sol: a) 1/100 b) 7/790

1.3.19

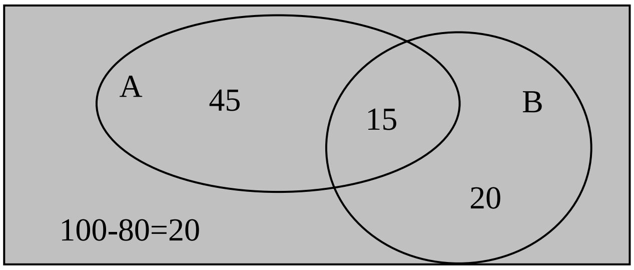
D'una baralla de 40 cartes s'extreuen quatre cartes amb retorn. Calculeu la probabilitat de obtenir: un as, un tres, un altre tres i un cavall.
Sol: $(1/10)^4$

1.4. Diagrames de conjunts

1.4.1

El 60% dels habitants d'una ciutat llegeixen el diari A. el 35% el B i un 15% tots dos. Triat un ciutadà a l'atzar, es demana: a) probabilitat de llegir un dels dos diaris. b) probabilitat de que no en llegeixi cap. c) probabilitat de que llegeixi només A. d) probabilitat de llegir-ne només un.

RAONAMENT



a) $p = \dfrac{45+15+20}{100} = 0'8$ b) $p = \dfrac{20}{100} = 0'2$

c) $p = \dfrac{45}{100} = 0'45$ d) $p = \dfrac{45+20}{100} = 0'65$

1.4.2

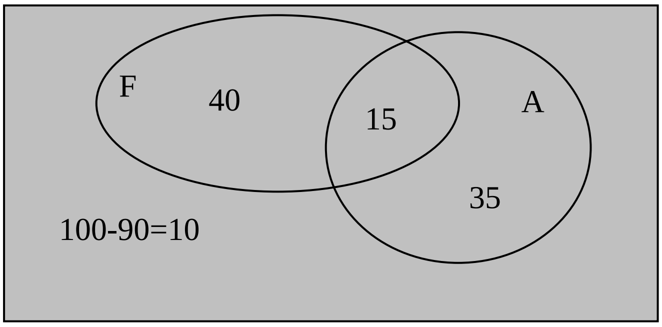
En un grup de 1000 persones, 400 parlen anglès, 100 parlen alemany i 30 parlen tots dos idiomes. Digues si són o no independents els successos (parlar anglès) i (parlar alemany).

Sol. $(Ang) \cap (Ale) \neq \phi$ *No*

1.4.3

El 55% dels alumnes d'una classe estudien francès, el 50% anglès i el 15% tots dos idiomes. Es tria un estudiant a l'atzar, calculeu la probabilitat de que: a) no estudi ni francès ni anglès, b) estudi francès però no anglès, c) estudi francès si se sap que estudia anglès, d) no estudi francès si se sap que no estudia anglès.

RAONAMENT



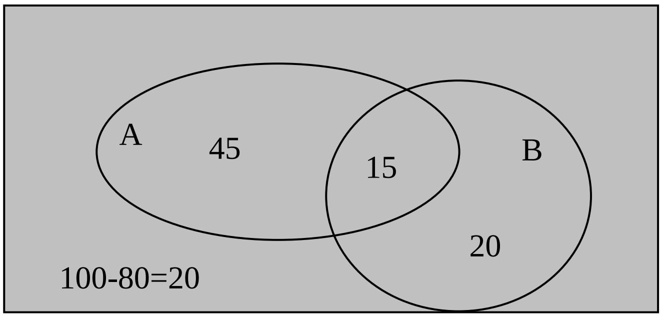
$$a)\ \ p(\overline{F}\cap\overline{A})=\frac{100-90}{100}=0'1 \qquad b)\ \ p(F\cap\overline{A})=\frac{40}{100}=0'4$$

$$c)\ \ p(F/A)=\frac{15}{15+35}=0'3 \qquad d)\ \ p(\overline{F}/\overline{A})=\frac{10}{10+40}=0'2$$

1.4.4

El 60% de la població d'una determinada ciutat llegeix el diari A. El 35% el B i un 15% tots dos . Triat un ciutadà a l'atzar, calculeu la probabilitat de: a) llegir algun diari, b) no llegir-ne cap, c) llegir només el A, d) llegir-ne només un.

.*RAONAMENT*



a) $p(A \cup B) = \frac{45+15+20}{100} = 0'8$ b) $p(\overline{A \cup B}) = \frac{100-80}{100} = 0'2$

c) $p(A \cap \overline{B}) = \frac{45}{100} = 0'45$ d) $p(A \cap \overline{B}) + p(B \cap \overline{A}) = \frac{45+20}{100} = 0'65$

1.5. Varis

1.5.1

Per treure el carnet de conduir en les categories A,B,C es coneixen les dades següents: superen la prova el (60)% dels presentats al carnet A, el 40% dels presentats al carnet B i el 25% dels presentats al carnet C. De la totalitat el 20% es presenten al A, el 50% al B i la resta al C. Triada una persona a l'atzar es demana: a) la probabilitat de que s'hagi presentat al A i hagi aprovat, b) si se sap que ha aprovat, probabilitat de que s'hagi presentat al A.

Sol: a) 0,13 b) 0,32

1.5.2

Una assignatura està dividida en quatre parts i un alumne té el 60% de possibilitats d'aprovar cada una de les parts, es demana: a)probabilitat de suspendre alguna part, b)probabilitat de suspendre'n dos, c) probabilitat de suspendre'n tres.

Sol: a) 0,8704 b) 0,3356 c) 0,1536

1.5.3

La probabilitat de que un projectil faci diana és del 50%, calculeu la probabilitat d'encertar un objectiu en quatre intents com a màxim.

Sol: 15/16

1.5.4

La probabilitat de que un estudiant aprovi totes les assignatures al juny és 0'4, trobeu la probabilitat de que quatre estudiants triats a l'atzar : a) no n'aprovi cap. b) solsament n'aprovi una. c) almenys un aprovat. d) totes aprovades.

RAONAMENT

$$p(A\cap A\cap A\cap A)=\frac{4}{10}\cdot\frac{4}{10}\cdot\frac{4}{10}\cdot\frac{4}{10}=\frac{16}{625}=0'0256$$

Sol:

a) 0,1296 b) 0,4752 c) 0,8704 d) 0,0256

1.5.5

Donats dos successos: A i B, si P(A)=0'5, P(B)=0'4 i P(A∩B)=0'2, calculeu les següents probabilitats:

a) (A∪B) b) (A'∩B) c) (A∪B)' d) (A'/B) e) (A/A∩B)

Sol: a) 0'7 b) 0'2 c) 0'3 d) 0'5 e) 1

1.5.6

Donats els successos A i B, si P(A)=0'4, P(B)=0'6 i P(A∩B)=0'2, calculeu les següents probabilitats:

a) (A'/B') b) (A/A∪B) c) (A/A∩B) d) (A'/B)

Sol: a) 0'5) b) 0'5 c) 1 d) 2/3

1.5.7

Sis persones estan assegudes en un banc, calculeu la probabilitat

de que dos determinades seguin juntes.
Sol: 1/3

NIVELL 2

2.1

Llancem (n) monedes una rere l'altra, es demana la probabilitat de: a) treure una sola cara. b) treure al menys una cara. c) treure (n) cares

Sol: a) $C_n^1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n$ b) $1-\left(\frac{1}{2}\right)^n$ c) $\left(\frac{1}{2}\right)^n$

2.2

En un lot de (m) articles, (n) són defectuosos. Es pren a l'atzar (k) articles un rere l'altre, trobeu la probabilitat de que tots siguin bons.

Sol: a) amb retorn $\left(\frac{m-n}{m}\right)^k$ b) sense retorn $\left(\frac{V_{m-n}^k}{V_m^k}\right)$

2.3

Una urna té (x) boles blanques i (y) boles negres, s'extreuen (2k) boles una rere l'altra amb retorn. Es demana, la probabilitat de: a) totes negres. b) meitat de cada color. c) cap de negra.

Sol: a) $\left(\frac{y}{x+y}\right)^{2k}$ b) $C_{x+y}^x \left(\frac{x}{x+y}\right)^k \left(\frac{y}{x+y}\right)^k$ c) $\left(\frac{x}{x+y}\right)^{2k}$

2.4

La caixa A té (x) bombetes on (a) són defectuoses. La caixa B té (y) bombetes on (b) són defectuoses. La caixa C té (z) bombetes on (c) són defectuoses . Triem una caixa a l'atzar i de la caixa una bombeta, calculeu: a) probabilitat de que la bombeta no funcioni b) si la bombeta no funciona, quina és la probabilitat de que pertanyi a la caixa A?

Sol: a) $\frac{1}{3}\left(\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}\right)$ b) $\left(\frac{\frac{a}{x}}{\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}}\right)$

2.5

De totes les peces que produeix una fàbrica, el (x)% són produïdes per la màquina A i la resta per la màquina B, se sap que el (a)% d'A i el (b)% de B són defectuoses. Es tria una peça a l'atzar , es demana: a) probabilitat de que sigui defectuosa. b) si se sap que la peça és defectuosa , probabilitat de que provingui d'A.

Sol:

a) $\frac{x}{100}\frac{a}{100}+\frac{(100-x)}{100}\frac{b}{100}$ b)($\frac{x.a}{10000}$)/($\frac{x}{100}\frac{a}{100}+\frac{(100-x)}{100}\frac{b}{100}$)

2.6

El a% i el b%, respectivament, de les peces produïdes per les màquines X i Y són defectuoses. Es tria una peça de cada màquina, es demana: a) probabilitat de que les dues siguin defectuoses. b) probabilitat de almenys una defectuosa.

Sol: a) $\frac{(ab)}{10000}$ b) 1- $\frac{(100-a)(100-b)}{10000}$

2.7

En una bossa hi ha (x) boles blanques i (y) boles negres. Calculeu la probabilitat de treure (k) boles de cop, totes siguin blanques.

Sol: $\dfrac{C_x^k}{C_{x+y}^k}$

2.8

El (x)% dels habitants d'una ciutat llegeixen el diari A, el (y)% el diari B i un (z)% tots dos. Triat un ciutadà a l'atzar, es demana: a)probabilitat de llegir un dels dos diaris. b) probabilitat de que no en llegeixi cap. c) probabilitat de que llegeixi només A. d) probabilitat de llegir-ne només un.

Sol a) $(x + y - z)/100$ b) $(100 + z - x - y)/100$
c) $(x - z)/100$ d) $(x + y - 2z)/100$

2.9

En una baralla de 40 cartes, una persona guanya (x) € si treu una sota o un rei. (y)€ si treu un cavall o un as i per les altres opcions ha de pagar (z)€. Quina esperança tenim de guanyar ? Trobeu la relació entre x , y , z per a que el joc sigui equilibrat.

Sol: $(x+y-3z)/5$ *euros/ partida* $x+y-3z = 0$

2.10

Per treure el carnet de conduir en les categories A,B,C es coneixen les dades següents: superen la prova el (a)% dels presentats al carnet A, el (b)% dels presentats al carnet B i el (c)% dels presentats al carnet C. De la totalitat el (x)% es presenten al A, el

(y)% al B i la resta al C. Triada una persona a l'atzar es demana: a) la probabilitat de que s'hagi presentat al A i hagi aprovat. b) si se sap que ha aprovat, probabilitat de que s'hagi presentat al A.
Sol: a) $\frac{ax}{10000}$ b) $\frac{ax}{ax+by}$

2.11
Una assignatura està dividida en (n) parts i un alumne té el (x)% de possibilitats de aprovar cada una de les parts, es demana: a) probabilitat de suspendre una part com a mínim, b) probabilitat de suspendre solament dues parts, c) probabilitat de suspendre totes les parts
Sol: a) $1-\left(\frac{x}{100}\right)^{n}$ b) $C_n^2\left(\frac{x}{100}\right)^{n-2}\left(\frac{100-x}{100}\right)^{2}$ c) $\left(\frac{100-x}{100}\right)^{n}$

2.12
La probabilitat de que un projectil faci diana és del (x)%, calculeu la probabilitat d'encertar un objectiu en (n) intents com a màxim.
Sol: $\frac{x}{100}\left(\frac{(\frac{100-x}{100})^{n}-1}{\frac{100-x}{100}-1}\right)$

2.13
Un jugador llença n monedes, si surten (x) cares guanya (x) € i si surten tot creus perd (y) €, a) calculeu els guanys o les pèrdues esperades, b) calculeu la relació entre x i y per tal que el joc sigui equilibrat.
Sol:

$$Guanys \;\; \sum_{x=1}^{n} x C_n^x \left(\frac{1}{2}\right)^x \left(\frac{1}{2}\right)^{n-x} - y\left(\frac{1}{2}\right)^n \; / \, partida$$

$$joc\ equilibrat \;\; \sum_{x=1}^{n} x C_n^x \left(\frac{1}{2}\right)^x \left(\frac{1}{2}\right)^{n-x} - y\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$$

2.14

Llancem (n) monedes una rere l'altra, calculeu la probabilitat de: a) treure (x) cares, b) almenys una cara, c) almenys (x) cares.

Sol:

a) $C_n^x \left(\frac{1}{2}\right)^x \left(\frac{1}{2}\right)^{n-x}$ b) $1-\left(\frac{1}{2}\right)^n$ c) $\sum_1^x C_n^x \left(\frac{1}{2}\right)^x \left(\frac{1}{2}\right)^{n-x}$

2.15

El (x)% dels alumnes d'una classe estudien francès, el (y)% anglès i el (z)% tots dos idiomes. Es tria un estudiant a l'atzar, calculeu la probabilitat de que: a) no estudi ni francès ni anglès, b) estudi francès però no anglès c) estudi francès si se sap que estudia anglès d) estudi anglès si se sap que estudia francès. e) no estudi francès si se sap que no estudia anglès

Sol: a) $\frac{100+z-x-y}{100}$ b) $\frac{x-z}{100}$ c) $\frac{z}{y}$ d) $\frac{z}{x}$ e) $\frac{100+z-x-y}{100-y}$

2.16

La probabilitat de que un estudiant aprovi el curs és del (x)%, trobeu la probabilitat de que (n) estudiants triats a l'atzar: a) no n' aprovi cap. b)solsament n'aprovi una, c) (k) aprovades, d) totes aprovades.

Sol:

a) $\left(\frac{100-x}{100}\right)^{n}$ *b) n* $\left(\frac{x}{100}\right)\left(\frac{100-x}{100}\right)^{n-1}$ *c)* $C_{n}^{k}\left(\frac{x}{100}\right)^{k}\left(\frac{100-x}{100}\right)^{n-k}$ *d)* $\left(\frac{x}{100}\right)^{n}$

ESTADÍSTICA DESCRIPTIVA

1. VARIABLES UNIDIMENSIONALS.

0.LLENGÜATGE

freqüència absoluta:	n_i
freqüència absoluta acumulada	N_i
freqüència relativa	f_i
freqüència relativa acumulada	F_i
valors de la variable	x_i
mediana	M
moda	M_0

MESURES DE CENTRALITZACIÓ

Mitjana aritmètica $\qquad \bar{x} = \dfrac{\eta_1 x_1 + \eta_2 x_2 + \dots\dots + \eta_k x_k}{n}$

Mitjana geomètrica $\qquad G = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots\dots\dots \cdot x_n}$

Mitjana harmònica $\qquad H = \dfrac{n}{\dfrac{1}{x_1} + \dots\dots + \dfrac{1}{x_n}}$

MESURES DE DISPERSIÓ

Desviació mitjana $\qquad \bar{d} = \dfrac{\sum \left|\bar{x} - x_i\right| \cdot \eta_i}{n}$

Variància $\qquad \sigma^2 = \dfrac{\sum \left(x_i - \bar{x}\right)^2 \cdot n_i}{n} = \dfrac{\sum x_i^{\,2} \cdot n_i}{n} - \bar{x}^2$

Desviació típica o tipus $\qquad \sigma = \sqrt{\sigma^2}$

Coeficient de Pearson $\qquad C_p = \upsilon = \dfrac{\sigma}{\bar{x}}$

EXERCICIS

1.1

Donada la distribució:

x_i	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*

n_i	1	9	26	59	72	52	29	7	1

Es demana: a) taula de la distribució, b) calculeu la moda, la mediana , la mitjana aritmètica , la desviació tipus i el coeficient de Pearson.

RAONAMENT

a)

x_i	n_i	N_i	$x_i n_i$	$x_i^2 n_i$
0	1	1	0	0
1	9	10	9	9
2	26	36	52	104
3	59	95	177	531
4	72	167	288	1152
5	52	219	260	1300
6	29	248	174	1044
7	7	255	49	343
8	1	256	8	64
TOTAL	256		1017	4547

b)

La moda $M_0 = x_5 = 4$

La mediana $\frac{n+1}{2} = 128'5 \qquad 95 \le 128'5 \le 167 \qquad M = x_5 = 4$

La mitjana $\bar{x} = \frac{1017}{256} = 3'9726$

La variància $\sigma^2 = \frac{4547}{256} - 3'9726^2 = 1'98$

La desviació tipus $\sigma = \sqrt{1'98} = 1'4$

Coeficient de Pearson $\upsilon = \frac{1'4}{3'9726} = 0'3524$

1.2

Donada la distribució.

x_i	2	3	4	5	6	7	8
n_i	10	13	16	20	15	11	5

Es demana: a) taula de la distribució, b) calculeu: la moda, la mediana , la mitjana aritmètica , la desviació tipus i el coeficient de Pearson.

RAONAMENT.

a)

x_i	n_i	N_i	$x_i n_i$	$x_i^2 n_i$
2	10	10	20	40
3	13	23	39	117
4	16	39	64	256
5	20	59	100	500
6	15	74	90	540
7	11	85	77	539
8	5	90	40	320
TOTAL	90		430	2312

b)

La moda $M_0 = x_4 = 20$. *La mediana* $\frac{n+1}{2} = 45'5 \quad M = x_4 = 5$

La mitjana $\bar{x} = \frac{430}{90} = 4'777$

La variància $\sigma^2 = \frac{2312}{90} - 4'777^2 = 2'8691$ *La desviació tipus*

$\sigma = \sqrt{2'8691} = 1'6938$ *Coeficient de Pearson* $\upsilon = \frac{1'6938}{4'777} = 0'3545$

1.3

Completeu la taula i calculeu: la moda, la mediana, la mitjana, la variància, la desviació tipus i el coeficient de variació de Pearson en la distribució següent:

alçada (cm.)	n_i
[140,145)	6
[145,150)	9
[150,155)	12
[155,160)	10

[160,165)	8
[165,170)	5

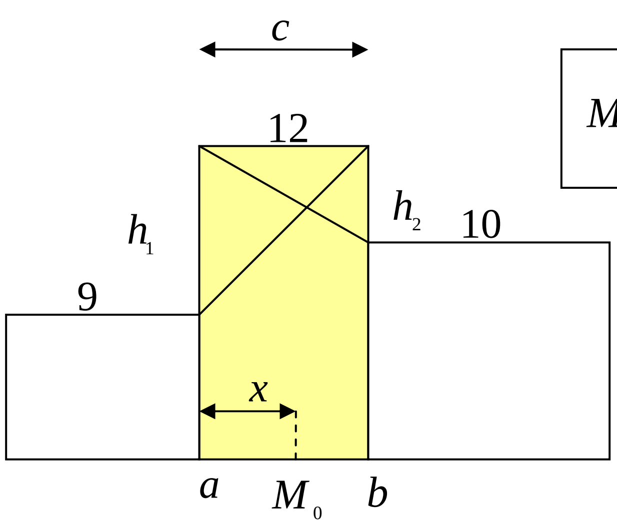
RAONAMENT

a)

Alçada (cm.)	n_i	N_i	x_i	$x_i n_i$	$x_i^2 n_i$
[140,145)	6	6	142’5	855	121837’5
[145,150)	9	15	147’5	1327’5	195806’25
[150,155)	12	27	152’5	1830	278075
[155,160)	10	37	157’5	1575	248062’5
[160,165)	8	45	162’5	1300	211250
[165,170)	5	50	167’5	837’5	140281’25
TOTAL	50		-	7725	1195312’5

b)

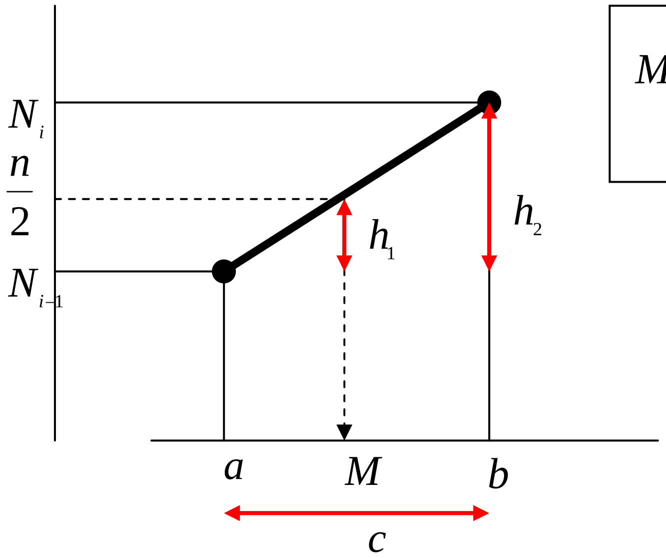
La moda



$$M_0 = a + c\frac{h_1}{h_1 + h_2}$$

$$M_0 = 150 + 5\frac{3}{3+2} = 153$$

La mediana



$$M = a + c\frac{h_1}{h_2}$$

c

$$y = \frac{n}{2} = 25 \qquad M = 150 + 5\frac{25-15}{27-15} = 154'166$$

La mitjana $\quad \bar{x} = \dfrac{7725}{50} = 154'5$

La variància $\quad \sigma^2 = \dfrac{1195312'5}{50} - 154'5^2 = 36$

La desviació tipus $\quad \sigma = 6$

El coeficient de Pearson $\quad \upsilon = \dfrac{6}{154'5} = 0'0388$

1.4

Els joves als 17 anys tenen un pes mitjà de 60’8 Kg. amb una desviació típica de 6’69 Kg. Els nens als 10 anys tenen un pes mitjà de 30’5 Kg. amb una desviació típica de 5’37 Kg.
És més variable el pes als 17 o als 10 anys?

Sol. és més variable als 10 anys.

(17 anys)	$\bar{x}$ = *60’8 Kg*	σ =*6’69 Kg*	υ = *0’11*
(10 anys)	$\bar{x}$ = *30’5 Kg*	σ =*5’37 Kg*	υ = *0’176*

1.5

Els jugadors de bàsquet de l'equip A tenen una mitjana de 18 punts amb una desviació típica de 4 punts. Els jugadors de l'equip B tenen una mitjana de 21 punts amb una desviació típica de 9 punts. Quin dels dos equips és més regular?

Sol. és més regular l'equip A

(equip A)	$\bar{x} = 18$ *punts*	$\sigma = 4$ *punts*	$\upsilon = 0'22...$
(equip B)	$\bar{x} = 21$ *punts*	$\sigma = 9$ *punts*	$\upsilon = 0'4285$

1.6

Els valors d'una variable discreta són: $\{7, -2, a, 3, 4\}$. *Sabent que la mitjana és 4, determina: a) el valor de a. b) la mediana. c) la variància. d) la desviació típica*

Sol.

$a = 8$ $M = 4$ $\sigma^2 = 12'4$ $\sigma = 3'5214$

1.7

La taula següent relaciona el nombre de gols marcats en diversos partits de futbol:

gols	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*
partits	*12*	*16*	*22*	*20*	*21*	*4*	*4*	*2*

calculeu: a) mesures de centralització, b) mesures de dispersió, c) coeficient de variació de Pearson.

Sol.

a)

$\bar{x} = 2'6$ *gols* $M = 3$ *gols* $M_0 = 2$ *gols*

b)

$\bar{d} = 1'38$ *gols* $\sigma^2 = 2'7956$ *gols* $\sigma = 1'672$ *gols*

c)

$\upsilon = 0'643$

1.8

La taula mostra les qualificacions en una determinada assignatura de dos grups diferents, prenen una mostra de 10 alumnes per grup.

grup A	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
grup B	2	2	4	4	4	5	5	6	6	8

Es demana: a) quin grup va obtenir millor nota mitjana ? b) quin és el més homogeni ?

Sol. el més homogeni és el grup B

(grup A)	$\bar{x} = 4'6$	$\sigma = 3'0725$	$\upsilon = 0'6679$
(grup B)	$\bar{x} = 4'6$	$\sigma = 1'7436$	$\upsilon = 0'3790$

1.9

Un fabricant vol comprar una màquina que li doni el major nombre de peces per hora. Fa 10 proves amb els resultats següents:
màquina A: 106, 98, 100, 99, 103, 96, 102, 100, 103, 93.
màquina B: 103, 102, 98, 97, 96, 98, 99, 101, 104, 102.
Trieu la més rentable.

RAONAMENT

és més regular la màquina B.
(màquina A) $\bar{x} = 100$ peces/h (màquina B) $\bar{x} = 100$ peces/h
les dues màquines tenen la mateixa mitjana, aleshores triarem la més regular.

(màquina A)	$\sigma = 3'577$ *peces/h*	$\upsilon = 0'03577$
(màquina B)	$\sigma = 2'607$ *peces/h*	$\upsilon = 0'02607$

1.10

La següent taula indica la distribució d'una variable estadística discreta , on: x_i , N_i i f_i representen respectivament la *freqüència absoluta, la freqüència absoluta acumulada i la freqüència relativa, es demana: a) completa la taula, b) polígon de la freqüència absoluta acumulada, c) la moda, la mediana i la mitjana aritmètica, d) els quartils* Q_1, Q_3 *e) la variància, la desviació tipus i el coeficient de Pearson.*

x_i	n_i	N_i	f_i	$x_i n_i$	$x_i^2 n_i$
1	4		0'08		
2	4				
3		16			
4	7				
5	5	28			
6					
7	7				
TOTAL			1		

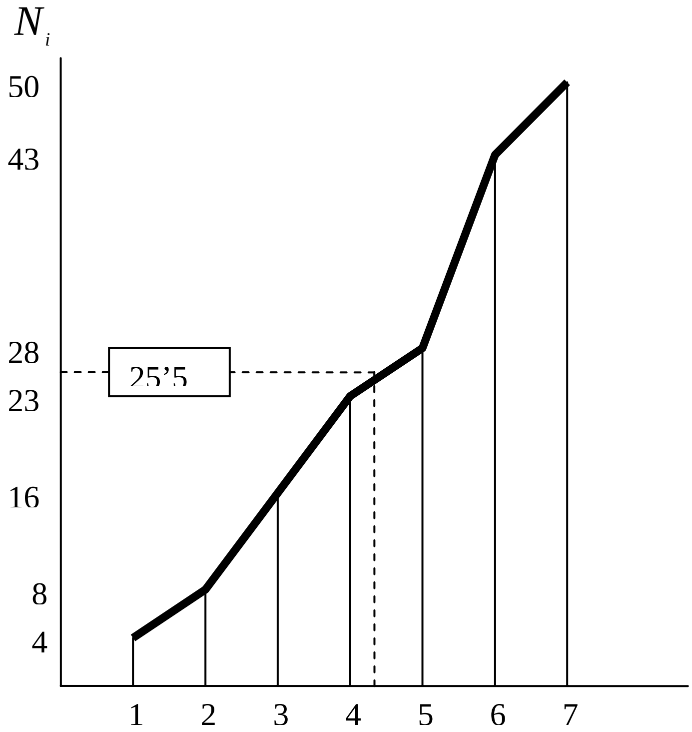
RAONAMENT

a)

$$0'08 = \frac{4}{n} \to n = 50$$

x_i	n_i	N_i	f_i	$x_i n_i$	$x_i^2 n_i$
1	4	4	0'08	4	4
2	4	8	0'08	8	16
3	8	16	0'16	24	72
4	7	23	7/50	28	112
5	5	28	0'1	25	125
6	15	43	0'3	90	540
7	7	50	7/50	49	343
TOTAL	50	-	1	228	1212

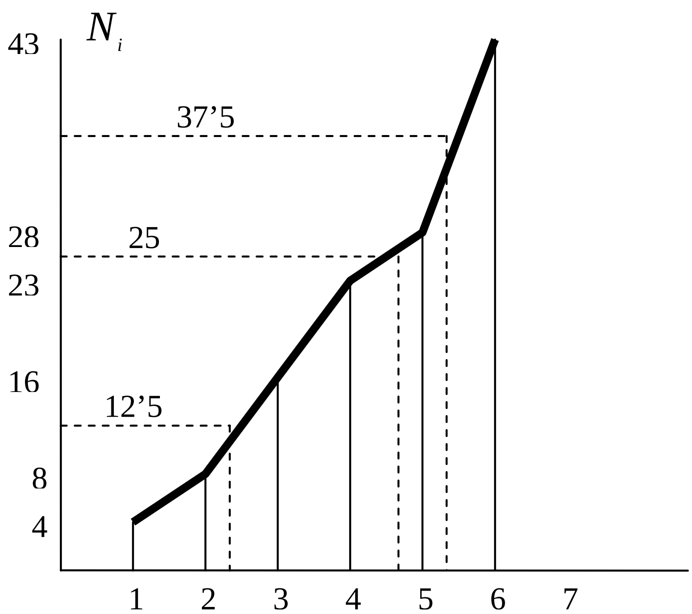
b)



c) La moda $M_0 = x_6 = 6$ *La mediana* $\frac{n+1}{2} = 25'5 \rightarrow M = 5$

La mitjana $\bar{x} = \frac{228}{50} = 4'56$

d)



y= 25% de 50 = 12’5 $\rightarrow Q_1 = 3$. *y=75%de50=37’5* $\rightarrow Q_3 = 6$

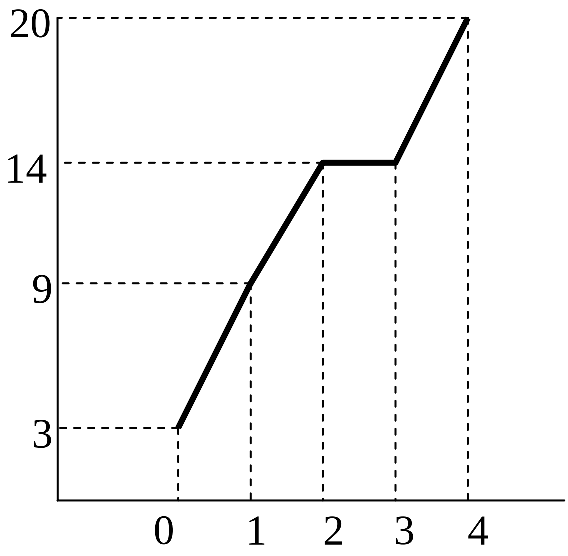
e)

$$\sigma^2 = \frac{1212}{50} - 4'56^2 = 3'4464 \qquad \sigma = \sqrt{3'4464} = 1'8564$$

$$\upsilon = \frac{1'8564}{4'56} = 0'4071 \quad \rightarrow$$ *la mitjana és poc representativa d'aquesta distribució.*

1.11

Una enquesta realitzada a una vintena de famílies sobre el nombre dels seus fills, té com a resultat el següent polígon de la freqüència absoluta acumulada, es demana: a) construeix la taula d'aquesta distribució, b) diagrama de barres de la freqüència absoluta, c)el nombre de fills més corrent. , la mediana i el promig de fills d'aquestes famílies, d)quin percentatge correspon a les famílies que tenen menys de 3 fills? e)la variància, la desviació tipus , el coeficient de Pearson i digues si la mitjana aritmètica és representativa d'aquesta vintena de famílies.



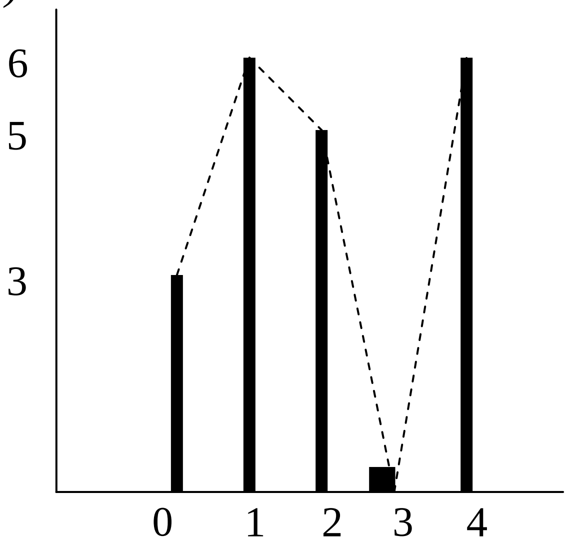
RAONAMENT

a)

x_i	n_i	N_i	f_i	$x_i n_i$	$x_i^2 n_i$
0	3	3	3/20	0	0
1	6	9	6/20	6	6

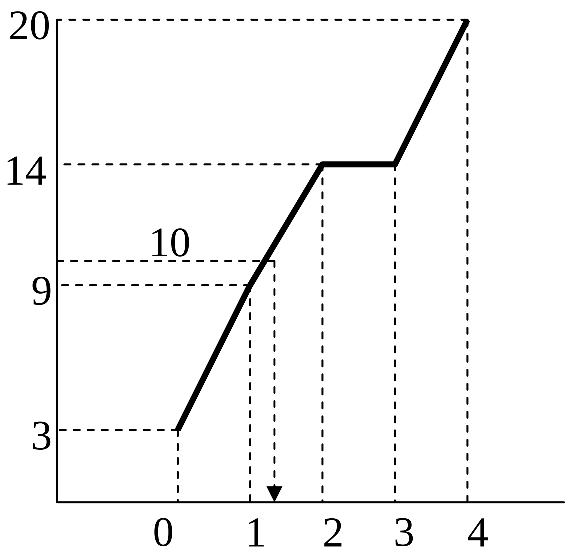
2	*5*	*14*	*5/20*	*10*	*20*
3	*0*	*14*	*0*	*0*	*0*
4	*6*	*20*	*6/20*	*24*	*96*
TOTAL	*20*	-	*1*	*40*	*124*

b)



c) La moda

M_0 = 1 fill o filla (el més corrent)



La mediana

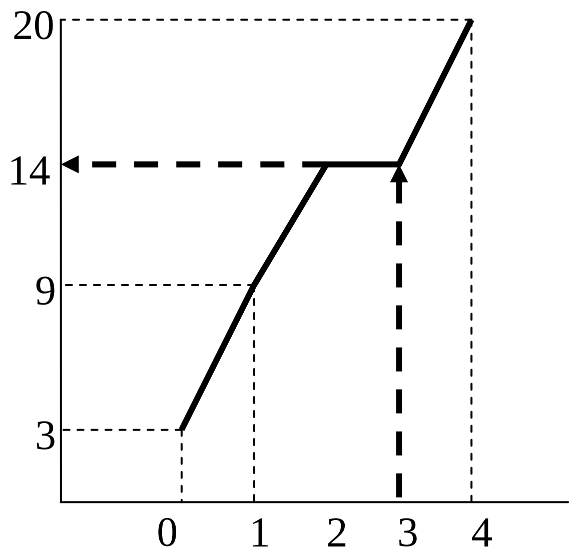
M= 2

La mitjana

$$\bar{x} = \frac{40}{20} = 2$$

d)

menys de 3 fills $\rightarrow \dfrac{14}{20}100 = 70\%$ *del total.*



e)

variància $\sigma^2 = \dfrac{124}{20} - 2^2 = 2'2$ *desviació tipus* $\sigma = \sqrt{2'2} = 1'4832$ *coeficient de Pearson* $\upsilon = \dfrac{1'4832}{2} = 0'74$ *la mitjana no és representativa de la distribució.*

1.12

Es fa una enquesta sobre el preu de lloguer d'una mostra de pisos en una determinada zona de la ciutat, obtenint la següent taula de distribució,

Lloguer(€)	x_i	n_i	N_i	f_i	$x_i n_i$	$x_i^2 n_i$
[0,150)		*17*				
[150,300)		*130*				
[300,450)			*327*			
[450,600)		*30*				
[600,750)		*10*				
[750,900)		*5*				
TOTAL				*1*		

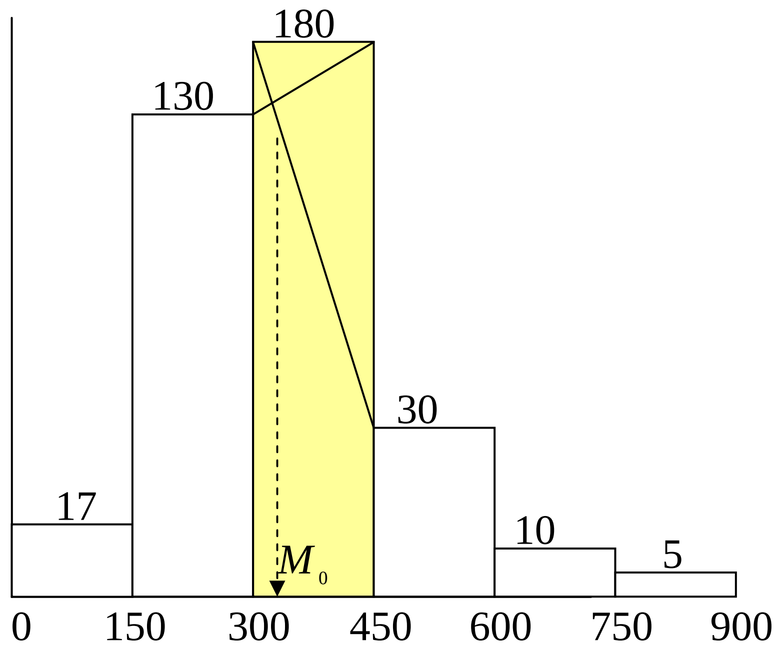
es demana: a)completa la taula, b)histograma de la freqüència absoluta i polígon de la freqüència absoluta acumulada. c)el *lloguer més freqüent, el lloguer que divideix la distribució per la meitat, el promig de tots els lloguers. d)preu màxim del 30% dels lloguers més barat, e)preu mínim del 30% dels lloguers més cars, f)la desviació tipus i el coeficient de Pearson . Digues si la mitjana és representativa d'aquesta distribució.*

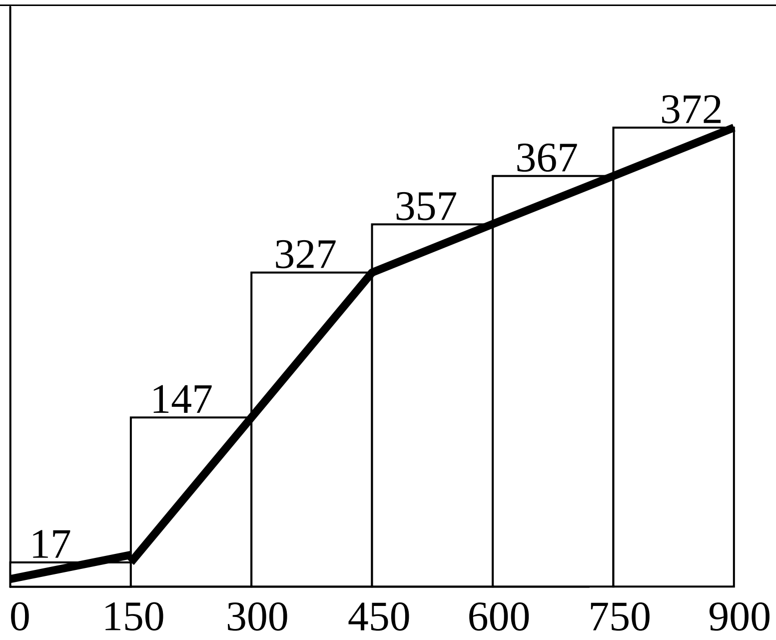
RAONAMENT

a)

Lloguer(€)	x_i	n_i	N_i	f_i	$x_i n_i$	$x_i^2 n_i$
[0,150)	75	17	17	17/372	1275	95625
[150,300)	225	130	147	130/372	29250	657000
[300,450)	375	180	327	180/372	67500	25312500
[450,600)	525	30	357	30/372	15750	8268750
[600,750)	675	10	367	10/372	6750	4556250
[750,900)	825	5	372	5/372	4125	3403125
TOTAL	-	372	-	1	124650	42293250

b)

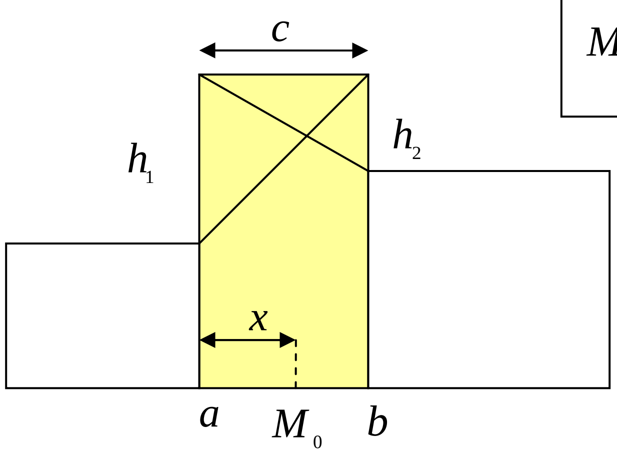




c)

La moda (el lloguer més freqüent)

$$\frac{x}{h_1} = \frac{c-x}{h_2}$$

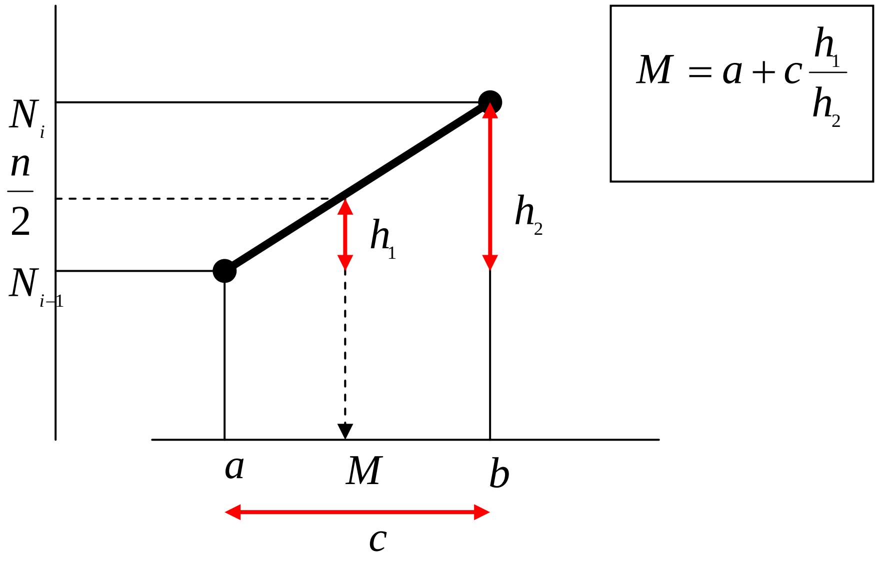


$$\boxed{M_0 = a + c\frac{h_1}{h_1+h_2}}$$

$$M_0 = a + x = a + c\frac{h_1}{h_1+h_2}$$

$$M_0 = a + c\frac{h_1}{h_1+h_2} = 300 + 150\frac{50}{50+150} = 337'5$$

La mediana

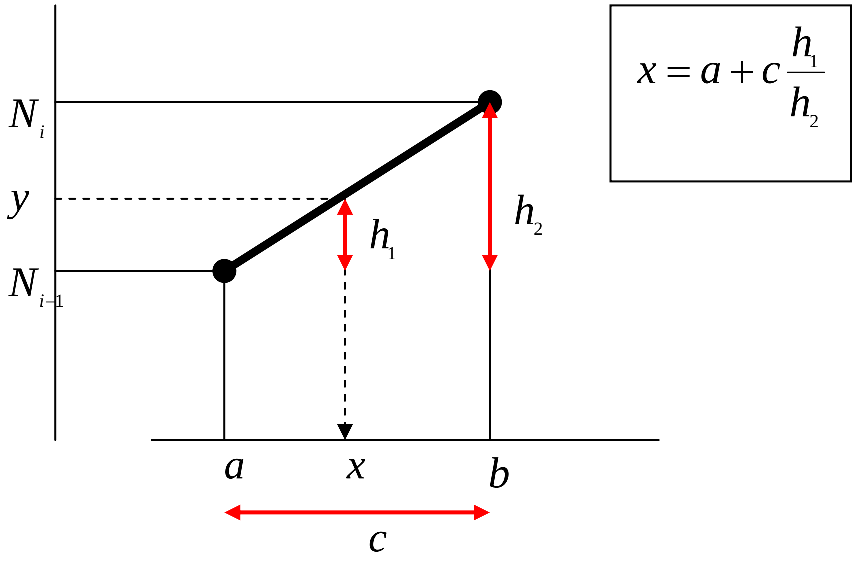


$$M = a + c\frac{h_1}{h_2} = 300 + 150\frac{186-147}{327-147} = 332'5\,€$$

La mitjana

$$\bar{x} = \frac{124560}{372} = 334'838\ €$$

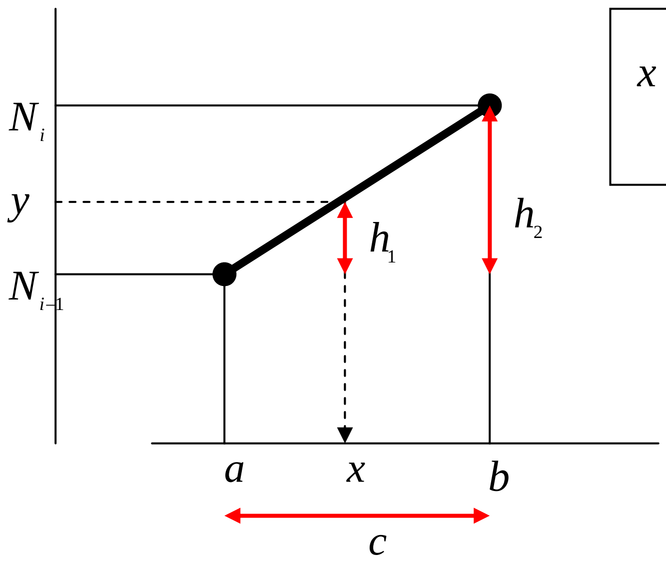
d)



y= 30% de 372 = 111’6

$$x = a + c\frac{h_1}{h_2} = 150 + 150\frac{111'6 - 17}{147 - 17} = 259'15€$$

e)



$$\boxed{x = a + c\frac{h_1}{h_2}}$$

y = 70% de 372 = 260’4

$$x = a + c\frac{h_1}{h_2} = 300 + 150\frac{260'4 - 147}{327 - 147} = 394'5€$$

f)

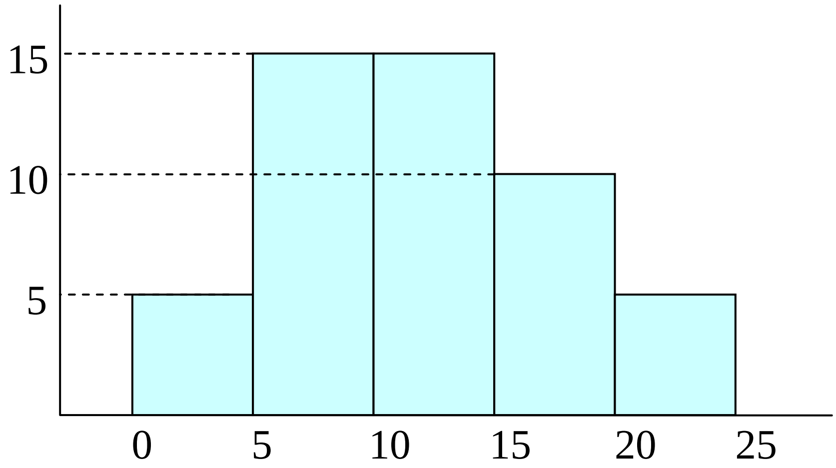
$$\bar{x} = \frac{124560}{372} = 334'838 \qquad \sigma^2 = \frac{42293250}{372} - 334'838^2 = 1575$$

$$\sigma = \sqrt{1575} = 39'686 \qquad \upsilon = \frac{39'686}{334'838} = 0'1185$$

La desviació relativa és d’un 11’8% i la mitjana sí és representativa d’aquesta distribució.

1.13

S’ha fet un examen tipus test de 25 preguntes a un grup de 50 persones i analitzades les respostes correctes s’ha elaborat el següent histograma de la freqüència absoluta:



INTERVAL	x_i	n_i	N_i	$x_i n_i$	$x_i^2 n_i$
[0,5)					
[5,10)					
[10,15)					
[15,20)					
[20,25)					
TOTAL					

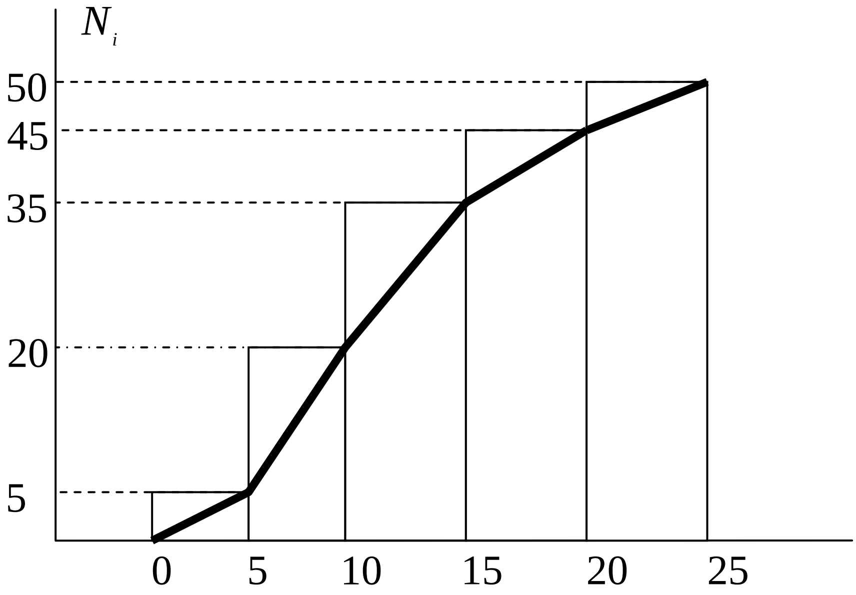
Es demana, a)completa la taula d'aquesta distribució. b)polígon de la freqüència absoluta acumulada. c)nombre de preguntes encertades més freqüent, la mediana de tots els resultats, el promig d'encerts. d) percentatge de persones amb més de 17 encerts, e)nombre màxim de preguntes encertades pel 70% de la gent amb pitjors resultats, f)La desviació tipus , el coeficient de Pearson i digues si la mitjana aritmètica és representativa o no d'aquesta distribució.

RAONAMENT

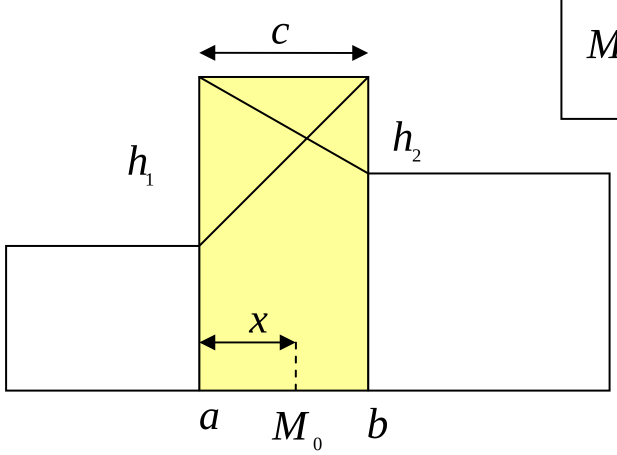
a)

INTERVAL	x_i	n_i	N_i	$x_i n_i$	$x_i^2 n_i$
[0,5)	2'5	5	5	12'5	31'25
[5,10)	7'5	15	20	112'5	843'75
[10,15)	12'5	15	35	187'5	2343'75
[15,20)	17'5	10	45	175	3062'5
[20,25)	22'5	5	50	112'5	2531'25
TOTAL	-	50	-	600	8812'5

b)



c)
La moda:

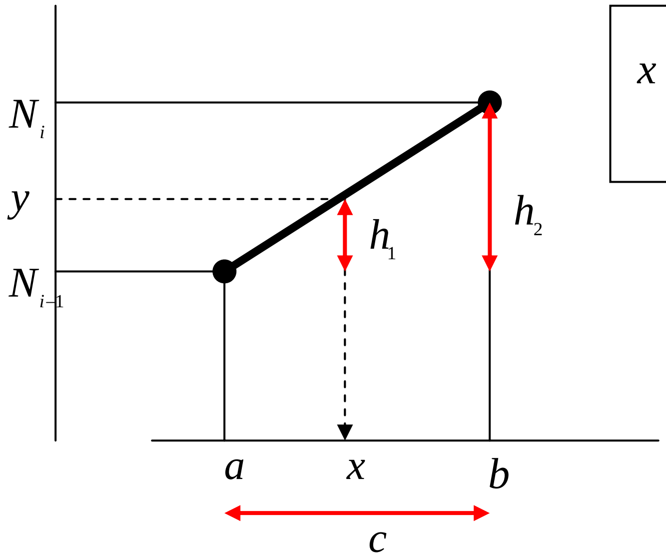


$$\boxed{M_0 = a + c\frac{h_1}{h_1 + h_2}}$$

$$M_0 = 5 + 10\frac{10}{10+5} = 8'66$$

La mediana

$$y = \frac{50}{2} = 25$$



$$x = a + c\frac{h_1}{h_2}$$

$$y = \frac{50}{2} = 25 \qquad x = M = 10 + 5\frac{25-20}{35-20} = 11'66$$

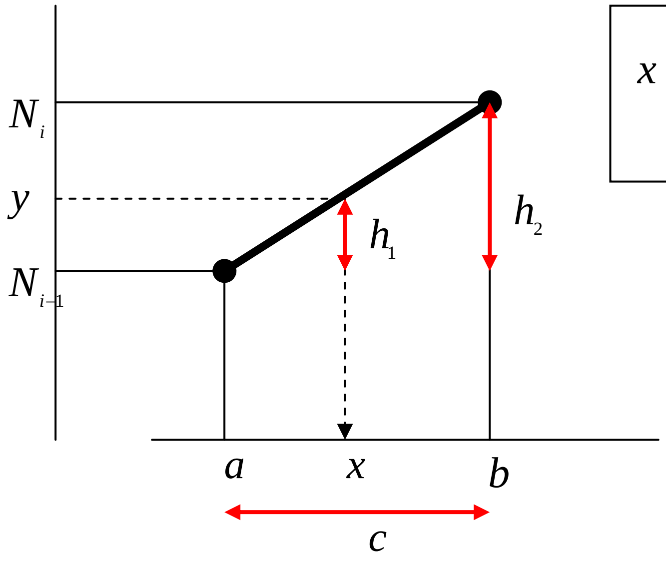
La mitjana

$$\bar{x} = \frac{600}{50} = 12$$

d)

x=17 $\quad 17 = 15 + 5\frac{y-35}{45-35}$ $\quad$ *y=35+4 = 39* $\quad$ *50-39=11*

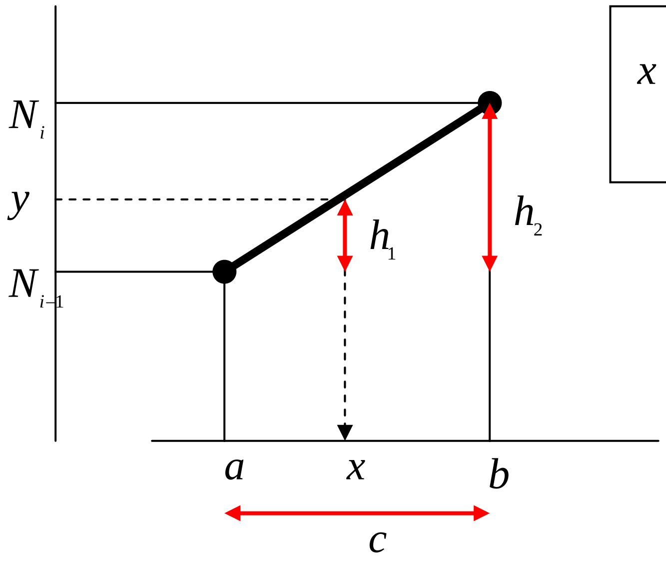
percentatge $\frac{11}{50}100 = 22\%$



$$x = a + c\,\frac{y - N_{i-1}}{h_2}$$

e)

y = 70% de 50 = 35 $\qquad x = 15$



$$x = a + c\,\frac{y - N_{i-1}}{h_2}$$

f)

$\bar{x} = \frac{600}{50} = 12 \qquad \sigma^2 = \frac{8812'5}{50} - 12^2 = 32'5 \qquad \sigma = \sqrt{32'5} = 5'7$

$\upsilon = \frac{5'7}{12} = 0'475$ *desviació del 47’5% . La mitjana no és* *representativa.*

1.14

La distribució de les notes de 60 alumnes agrupades per intervals, és:

INTERVAL	x_i	n_i	N_i	$x_i n_i$	$x_i^2 n_i$
[0,3)	1'5	8			
[3,5)		16			
[5,7)		26			
[7,9)	8	9			
[9,10]		1			
TOTAL		60			

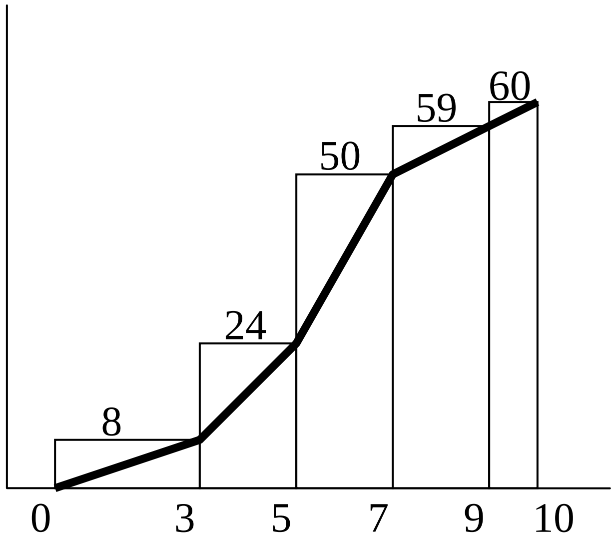
es demana:a)completa la taula. b)polígon de la freqüència absoluta acumulada. c)la nota més freqüent, la nota que parteix la distribució per la meitat, la nota mitjana. d)percentatge de persones amb més nota que un 6. e)la desviació tipus , el coeficient de Pearson i digues si la mitjana aritmètica és representativa o no d'aquesta distribució.

RAONAMENT

a)

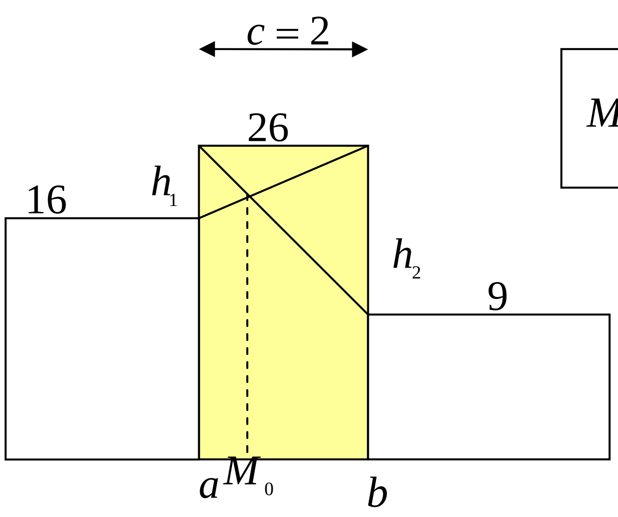
INTERVAL	x_i	n_i	N_i	$x_i n_i$	$x_i^2 n_i$
[0,3)	1'5	8	8	12	18
[3,5)	4	16	24	64	256
[5,7)	6	26	50	156	936
[7,9)	8	9	59	72	576
[9,10]	9'5	1	60	9'5	90'25
TOTAL	-	60	-	313'5	1876'25

b)



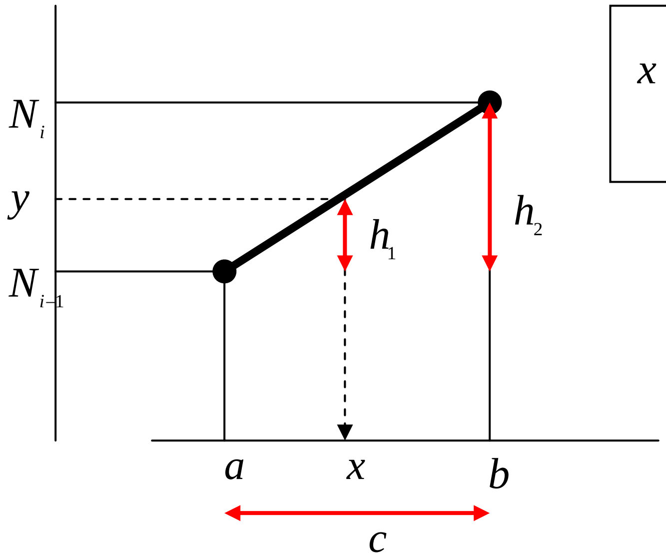
c)

La moda $M_0 = a + c\dfrac{h_1}{h_1 + h_2} = 5 + 2\dfrac{10}{10+17} = 6'1764$



$$M_0 = a + c\frac{h_1}{h_1 + h_2}$$

La mediana



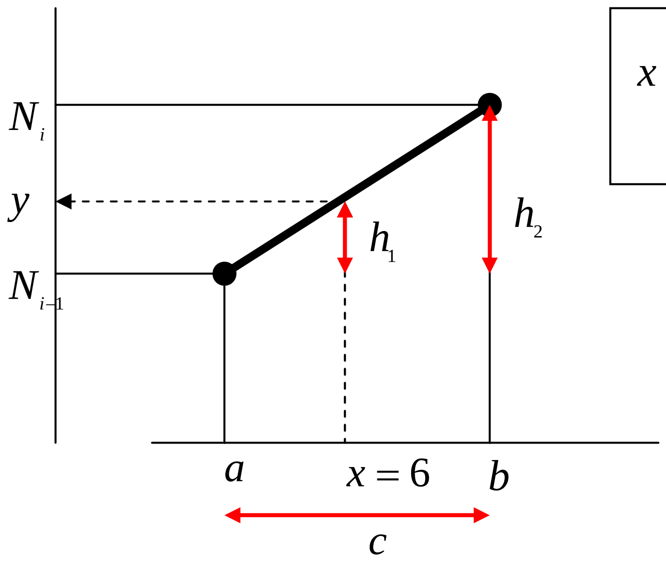
$$x = a + c\,\frac{y - N_{i-1}}{h_2}$$

$$y = \frac{n}{2} = 30 \qquad x = M = 5 + 2\,\frac{30-24}{50-24} = 5'4615$$

La mitjana

$$\bar{x} = \frac{313'5}{60} = 5'225$$

d)



$$x = a + c\,\frac{y - N_{i-1}}{h_2}$$

$$6 = 5 + 2\,\frac{y-24}{50-24} \qquad y = 37 \qquad 60 - 37 = 23$$

$$p = \frac{23}{60}100 = 38'33\%$$

e)

$$\bar{x} = \frac{313'5}{60} = 5'225 \qquad \sigma^2 = \frac{1876'25}{60} - 5'225^2 = 3'97$$

$$\sigma = \sqrt{3'97} = 2 \qquad \upsilon = \frac{2}{5'225} = 0'3827$$

la mitjana no és representativa donat que la desviació és de un 38% respecte a la mitjana.

1.15

S'ha fet una enquesta sobre el nombre de fills a 50 famílies amb els següent resultat,

2	1	2	5	2	1	1	1	4	0
0	2	0	4	4	1	1	2	2	3
1	2	3	0	3	1	3	2	2	3
3	1	5	4	3	3	1	2	2	2
3	2	2	1	0	2	2	1	0	1

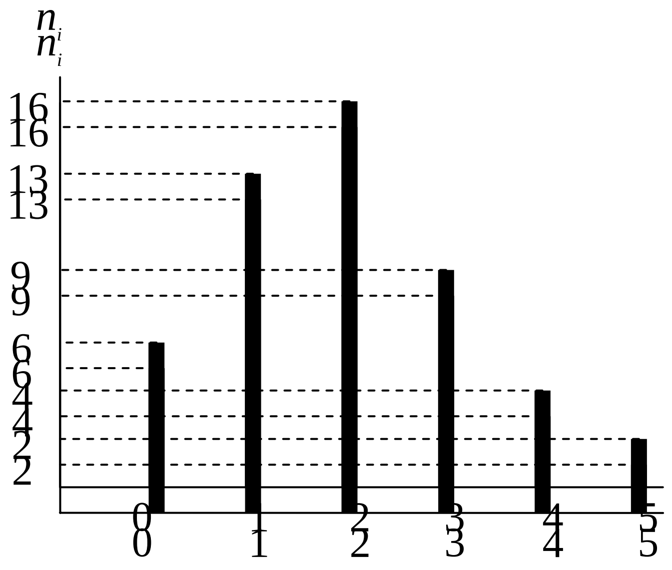
Es demana: a) formeu una taula d'aquesta distribució. b) diagrama de barres de la freqüència absoluta i polígon de la freqüència absoluta acumulada. c) la moda, la mediana i la mitjana aritmètica. d) desviació tipus i coeficient de Pearson.

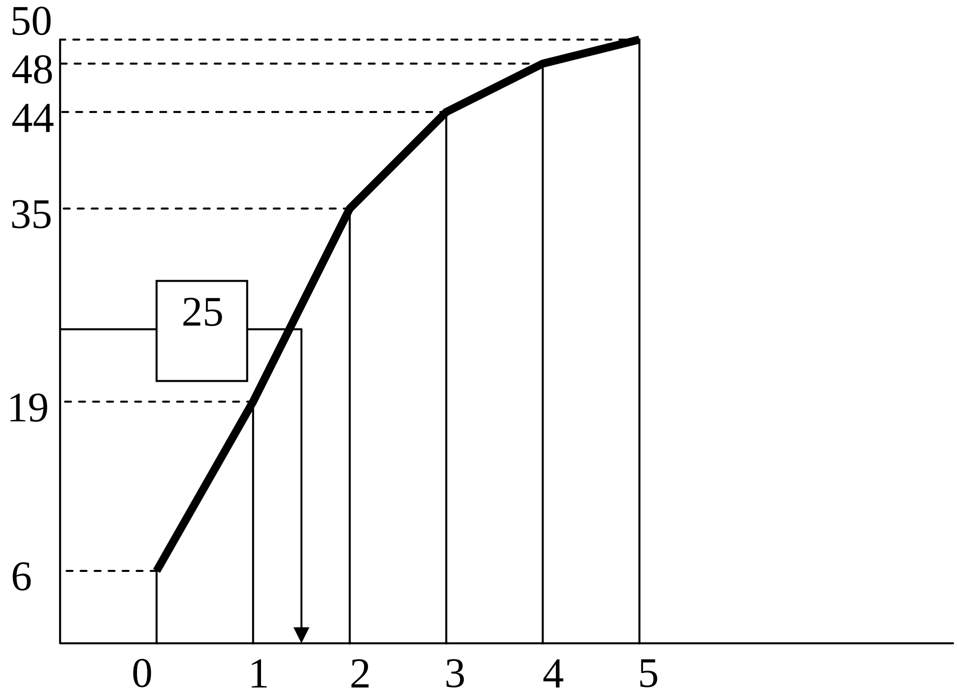
RAONAMENT

a)

x_i	n_i	N_i	$x_i n_i$	$x_i^2 n_i$
0	6	6	0	0
1	13	19	13	13
2	16	35	32	64
3	9	44	27	81
4	4	48	16	64
5	2	50	10	50
TOTAL	50	-	98	272

b)





c)

La moda $M_0 = 2$ *La mediana* *y = 25* *M = 2*

La mitjana $\bar{x} = \frac{98}{50} = 1'96$

d)

$\sigma^2 = \frac{272}{50} - 1'96^2 = 1'5984$ $\sigma = \sqrt{1'5984} = 1'2643$

$\upsilon = \frac{1'2643}{1'96} = 0'645$

1.16

Hem mesurat les alçades d'un grup de 25 alumnes amb el següent resultat:

Alçada(cm)	x_i	n_i	N_i	$x_i n_i$	$x_i^2 n_i$
[150,155)		3			
[155,160)		7			
[160,165)		6			
[165,170)		4			
[170,175)		5			
TOTAL					

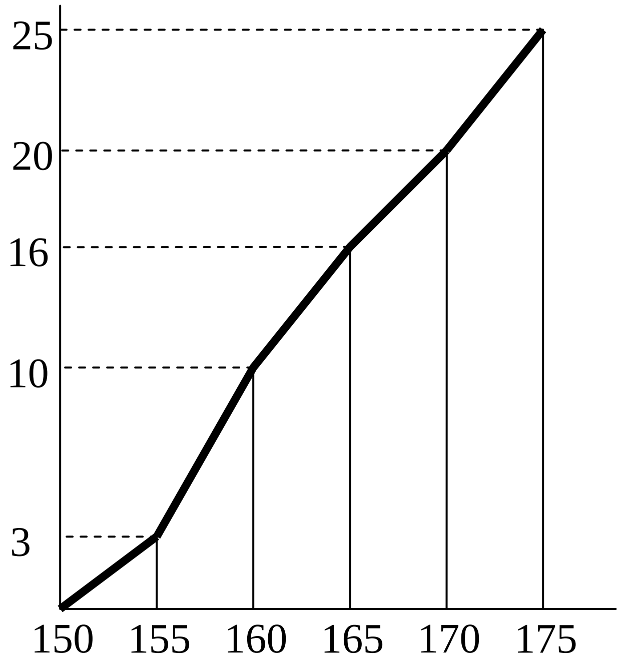
es demana: a)completa la taula. b)polígon de la freqüència absoluta acumulada. c)mesures de centralització i de dispersió. d)quants alumnes hi ha per sobre de 167cm ? e)quants alumnes hi ha entre 157 i 167cm ?

RAONAMENT

a)

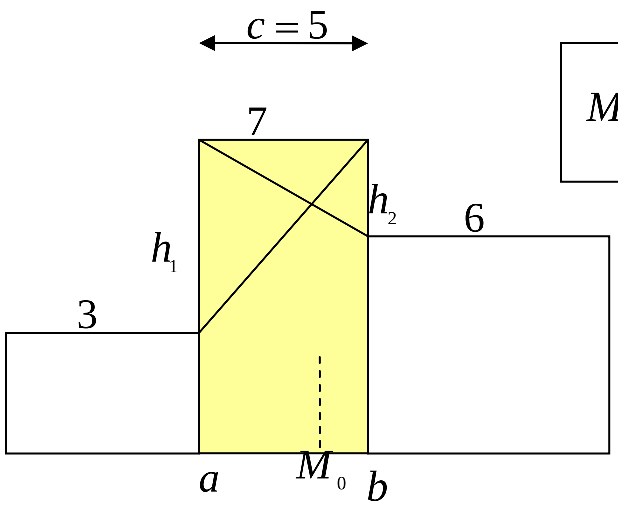
Alçada(cm)	x_i	n_i	N_i	$x_i n_i$	$x_i^2 n_i$
[150,155)	152'5	3	3	457'5	69768'75
[155,160)	157'5	7	10	1102'5	173643'75
[160,165)	162'5	6	16	975	158437'5
[165,170)	167'5	4	20	670	112225
[170,175)	172'5	5	25	862'5	148781'25
TOTAL	-	25	-	4067'5	662856'25

b)



c)

La moda

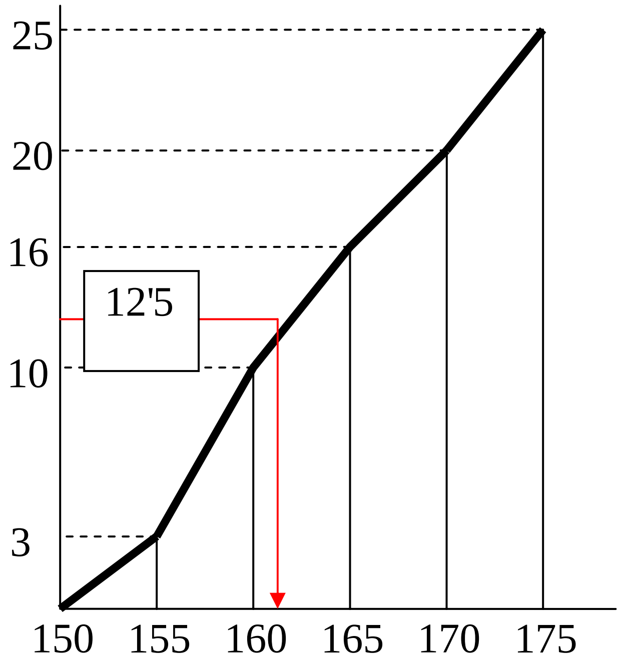


$$\boxed{M_0 = a + c\frac{h_1}{h_1 + h_2}}$$

$$M_0 = 155 + 5\frac{4}{4+1} = 159$$

La mediana

y = 12’5



$$M = 160 + 5\frac{12'5 - 10}{16 - 10} = 162'083$$

La mitjana $\bar{x} = \dfrac{4067'5}{25} = 162'7$

La variància $\sigma^2 = \dfrac{662856'25}{25} - 162'7^2 = 42'96$

La desviació tipus $\sigma = \sqrt{42'96} = 6'554$

Coeficient de variació de Pearson $\upsilon = \dfrac{6'554}{162'083} = 0'04$ *La mitjana és una bona representació de la distribució.*

ESTADÍSTICA DESCRIPTIVA

2. VARIABLES BIDIMENSIONALS.

LLENGÜATGE i FÓRMULES

Mitjana aritmètica

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i n_i}{n} \qquad \bar{y} = \frac{\sum y_i n_i}{n}$$

Variància

$$\sigma_x^2 = \frac{\sum \left(x_i - \bar{x}\right)^2 \cdot n_i}{n} = \frac{\sum x_i^2 \cdot n_i}{n} - \bar{x}^2$$

$$\sigma_y^2 = \frac{\sum \left(y_i - \bar{y}\right)^2 \cdot n_i}{n} = \frac{\sum y_i^2 \cdot n_i}{n} - \bar{y}^2$$

Desviació típica o tipus

$$\sigma_x = \sqrt{\sigma_x^2} \qquad \sigma_y = \sqrt{\sigma_y^2}$$

Covariància

$$\sigma_{xy} = \frac{\sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) n_i}{n} = \frac{\sum x_i y_i n_i}{n} - \bar{x}\,\bar{y}$$

Coeficient de correlació

$$r = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}$$

Recta de regressió de y sobre x (y/x)

$$y - \bar{y} = \left(\frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2}\right)(x - \bar{x}) \quad \Leftrightarrow \quad y = \left(\frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2}\right)x + \left(\bar{y} - \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2}\bar{x}\right)$$

Recta de regressió de x sobre y (x/y)

$$x - \bar{x} = \left(\frac{\sigma_{xy}}{\sigma_y^2}\right)(y - \bar{y}) \quad \Leftrightarrow \quad y = \left(\frac{\sigma_y^2}{\sigma_{xy}}\right)x + \left(\bar{y} - \frac{\sigma_y^2}{\sigma_{xy}}\bar{x}\right)$$

EXERCICIS

2.1

D'una distribució bidimensional s'han obtingut els següents resultats:

$\overline{x} = 0'5$ $\overline{y} = 3'4$ $\sigma_x = 0'026$ $\sigma_y = 0'392$ $\sigma_{xy} = 0'01$ *Calculeu el coeficient de correlació lineal així com les rectes de regressió.*

RAONAMENT

Coeficient de correlació: $r = \dfrac{0'01}{0'026 \cdot 0'392} = 0'9812$

Recta de regressió (y/x)

$y - 3'4 = \dfrac{0'01}{0'026^2}(x - 0'5)$ $y - 3'4 = 14'8(x - 0'5)$ $y = 14'8x - 4$

Recta de regressió (x/y)

$x - 0'5 = \dfrac{0'01}{0'392^2}(y - 3'4)$ $x - 0'5 = 0'065(y - 3'4)$ $y = 15'38x - 4'29$

És una molt bona correlació lineal donat que les rectes de regressió tenen el pendent molt semblant i el coeficient de correlació pròxim a 1.

2.2

A partir de la taula següent, calculeu el coeficient de correlació lineal i les dues rectes de regressió.

	x_i	1	2	3	4	5	total
y_i							
1		-	-	-	-	1	1
2		-	6	1	3	-	10
3		2	1	4	-	-	7
4		1	1	-	-	-	2
total		3	8	5	3	1	20

RAONAMENT

x_i	n_i	$x_i n_i$	$x_i^2 n$
1	3	3	3
2	8	16	32
3	5	15	45
4	3	12	48
5	1	5	25
total	20	51	153

y_i	n_i	$y_i n_i$	$y_i^2 n$
1	1	1	1
2	10	20	40
3	7	21	63
4	2	8	32
total	20	50	136

$\bar{x} = \frac{51}{20} = 2'55$

$\sigma_x^2 = \frac{153}{20} - 2'55^2 = 1'1475$

$\sigma_x = 1'0712$

$\bar{y} = \frac{50}{20} = 2'5$

$\sigma_y^2 = \frac{136}{20} - 2'5^2 = 0'55$

$\sigma_y = 0'7416$

x_i	y_i	n_i	$x_i y_i n_i$	$x_i^2 n_i$	$y_i^2 n_i$
1	3	2	6	2	18
1	4	1	4	1	16
2	2	6	24	24	24
2	3	1	6	4	9
2	4	1	8	4	16
3	2	1	6	9	4
3	3	4	36	36	36
4	2	3	24	48	12
5	1	1	5	25	1
total		20	119	153	136

$\sigma_{xy} = \frac{119}{20} - 2'55 \cdot 2'5 = -0'425$ $\qquad r = \frac{-0'425}{1'0712 \cdot 0'7416} = -0'5349$

Recta de regressió (y/x)

$y - 2'5 = \left(\frac{-0'425}{1'0712^2}\right)(x - 2'55)$ $\qquad y = -0'37x + 3'47$

Recta de regressió de (x/y)

$x - 2'55 = \left(\frac{-0'425}{0'7416^2}\right)(y - 2'5)$ $\qquad y = -1'294x + 5'8$

Les dues variables són poc dependents i la relació lineal és molt poc fiable.

2.3

El consum d'energia per càpita en milers de KW/h i la renda per càpita en milers de € en sis països de la UE són els següents:

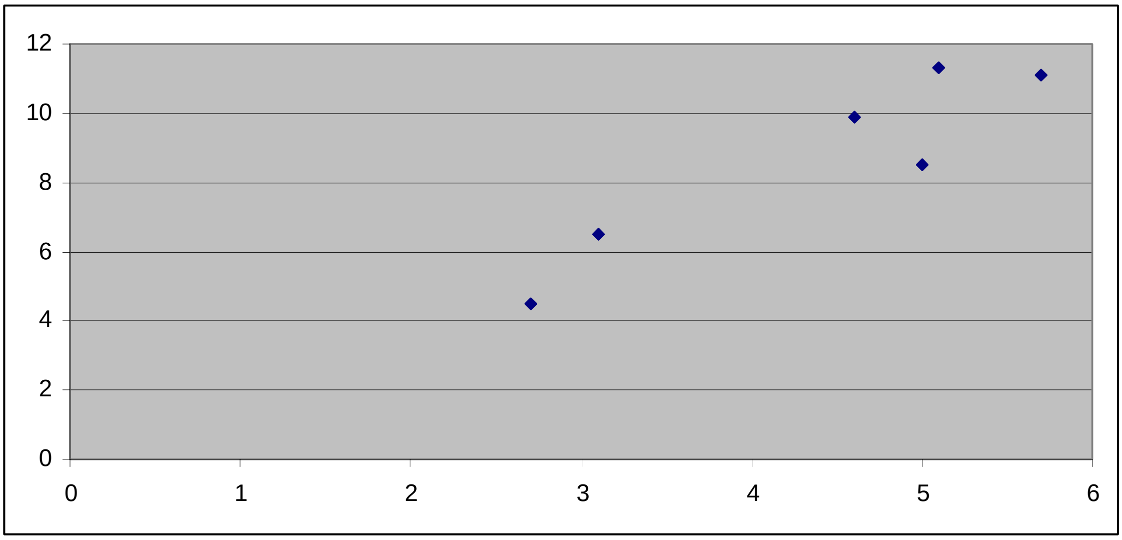
	Consum	Renda
Alemanya	5'7	11'1

Bèlgica	5	8’5
Dinamarca	5’1	11’3
Espanya	2’7	4’5
França	4’6	9’9
Itàlia	3’1	6’5

Es demana: a) núvol de punts de la distribució. b) coeficient de correlació i rectes de regressió. c) quina predicció podem fer sobre el consum d’energia de Grècia si se sap que la renda per càpita és de 4’4 milers de €?

RAONAMENT

a)



b)

x_i	y_i	$x_i\,y_i$	x_i^2	y_i^2
5’7	11’1	57’63	32’49	123’21
5	8’5	42’5	25	72’25
5’1	11’3	57’63	26’01	127’69
2’7	4’5	12’15	7’29	20’25
4’6	9’9	45’54	21’16	98’01
3’1	6’5	20’15	9’61	42’25
26’2	51’8	235’1	121’97	483’66

$\bar{x} = \frac{26'2}{6} = 4'366$ $\qquad$ $\bar{y} = \frac{51'8}{6} = 8'633$

$\sigma_x^2 = \frac{121'97}{6} - 4'366^2 = 1'2663$ $\qquad$ $\sigma_x = \sqrt{1'2663} = 1'125$

$$\sigma_y^{\,2} = \frac{483'66}{6} - 8'633^2 = 6'081 \qquad \sigma_y = \sqrt{6'081} = 2'466$$

$$\sigma_{xy} = \frac{235'1}{6} - 4'366 \cdot 8'633 = 1'49 \qquad r = \frac{1'49}{1'125 \cdot 2'466} = 0'537$$

Recta de regressió de (y/x)

$$y - 8'633 = \left(\frac{1'49}{1'2663}\right)(x - 4'366) \quad \Leftrightarrow \quad y = 1'176x + 3'495$$

Recta de regressió de (x/y)

$$x - 4'366 = \left(\frac{1'49}{6'081}\right)(y - 8'633) \quad \Leftrightarrow \quad y = 4'08x - 9'185$$

c) recta de (x/y) $\qquad x = 4'366 + \left(\frac{1'49}{6'081}\right)(4'4 - 8'633) = 3'328$

és una estimació poc fiable

2.4

S'han analitzat sis models d'impressores amb color i en banc i negre donant com a resultat el que figura a la taula següent on els valors representen el cost per pàgina en cèntims d'euro.

Blanc i Negre(x_i)	8	11	17	21	14	10
Color(y_i)	33	49	95	106	58	53

Trobeu: a) la recta de regressió de y sobre x (y/x). b) quant costaria imprimir una pàgina en color d'una impressora on una pàgina en blanc i negre costa 12 cèntims d'euro.

RAONAMENT

a)

x_i	y_i	x_i^2	y_i^2	$x_i y_i$
8	33	64	1089	264
11	49	121	2401	539
17	95	289	9025	1615
21	106	441	11236	2226

14	58	196	3364	812
10	53	100	2809	530
81	394	1211	29924	5986

$\bar{x} = 13'5$ $\bar{y} = 65'67$ $\sigma_x^2 = 19'58$ $\sigma_y^2 = 674'78$ $\sigma_{xy} = 111'12$

$\sigma_x = 4'425$ $\sigma_y = 25'97$ $r = 0'97$

La recta de regressió de y sobre x :

$$y - 65'67 = \left(\frac{111'12}{19'58}\right)(x - 13'5) \quad \Leftrightarrow \quad y = 5'68x - 11'01$$

b)

$y(12) = 57'15$ *cèntims d'euro.*

2.5

L'alçada en centímetres de sis alumnes de la mateixa edat i la dels seus pares respectius ve reflectida en la taula següent:

Fill(x)	160	150	160	170	180	170
Pare(y)	180	170	175	185	180	175

es demana, a)les dues rectes de regressió. b)digues si són dependents o independents les variables.

RAONAMENT

a)

$Fill(x_i)$	$Pare(y_i)$	x_i^2	y_i^2	x_iy_i
160	180	25600	32400	28800
150	170	22500	28900	25500
160	175	25600	30625	28000
170	185	...	...	...
180	180			
170	175	...	...	...
990	1065	163900	189175	175900

$\bar{x} = 165$ $\bar{y} = 177'5$ $\sigma_x = 9'57$ $\sigma_y = 4'79$ $\sigma_{xy} = 29'17$

Rectes de regressió

Y/X $y = 0'32x + 124'7$

X/Y $y = 0'79x + 47'58$

b)

Les rectes tenen la pendent força diferent aleshores la dependència és fluixa. Formen un angle $\alpha = 28'12^{o}$

$$tg\alpha = \frac{0'79 - 0'32}{1 + 0'79 \cdot 0'32} = 0'5345 \qquad \alpha = 28'12^{o}$$

Si analitzem el coeficient de correlació ens dona $r = 0'636$ *que reforça lo dit anteriorment.*

2.6

S'ha fet un estudi a nivell de primer de Batxillerat sobre la nota mitjana de Matemàtiques i Anglès en sis centres de secundària, com reflecteix la següent taula:

Matemàtiques x	*6'5*	*5'2*	*6*	*6'5*	*7*	*6*
Anglès y	*7*	*5*	*5*	*6*	*7'5*	*5*

es demana: a) recta de regressió de y sobre x b) si un altre centre té per nota mitjana de Matemàtiques 5'5, que cal esperar de la nota d'Anglès?

RAONAMENT

a)

Matemàt.(x_i)	*Anglès*(y_i)	x_i^2	y_i^2	$x_i y_i$
6'5	*7*	*42'25*	*49*	*45'5*
5'2	*5*	*27'04*	*25*	*26*
6	*5*	*36*	*30*	*30*
6'5	*6*	*42'25*	*39*	*39*
7	*7'5*	*49*	*52'5*	*52'5*
6	*5*	*36*	*30*	*30*
37'2	*35'5*	*232'54*	*225'5*	*223*

$\overline{x} = 6'2 \qquad \overline{y} = 5'916 \qquad \sigma_x^2 = 0'31 \qquad \sigma_y^2 = 2'584 \qquad \sigma_{xy} = 0'4874 \qquad r = 0'5475$

Recta de regressió de (y/x) $y - 5'916 = \left(\frac{0'4874}{0'31}\right)(x - 6'2) \qquad y = 1'57x - 3'832$

b)

y(5'5)=4'8 és la nota esperada en Anglès però donat que la dependència de les variables és dolenta aleshores la nota no és fiable.

2.7

S'ha mesurat la potència (en kW) i el consum (en litres/cada 100Km) en sis models diferents de cotxes obtenint com a resultat:

Potència	*81*	*85*	*66*	*85*	*104*	*83*
Consum	*7'5*	*10'6*	*8'2*	*9'2*	*10'7*	*8'7*

es demana:a) la covariància i el coeficient de correlació, b) estudia la dependència de les dues variables.

RAONAMENT

a)

Potència.(x_i)	Consum(y_i)	x_i^2	y_i^2	$x_i y_i$
81	7'5	6561	56'25	607'5
85	10'6	7225	112'36	901
66	8'2	...	...	...
85	9'2			
104	10'7			
83	8'7	...	...	...
504	54'9	43072	510'67	4666'6

$\overline{x} = 84$ $\overline{y} = 9'15$ $\sigma_x = 11'075$ $\sigma_y = 1'178$ $\sigma_{xy} = 9'166$ $r = 0'7$

b) la relació entre les dues variables és positiva però poc alta

2.8

Un grup de sis atletes han realitzat dues proves una de salt de longitud i una altra de salt d'altura amb puntuació de 0 a 5 donant els següents resultats:

Longitud (x)	*5*	*4*	*5*	*4*	*4*	*3*
Altura (y)	*4*	*4*	*5*	*3*	*4*	*3*

es demana:a) les dues rectes de regressió. b) estudia la dependència de les variables analitzant el pendent de les dues rectes i el coeficient de correlació.

RAONAMENT

a)

Longitud(x_i)	Altura (y_i)	x_i^2	y_i^2	$x_i y_i$
5	4	25	16	20

4	*4*	*16*	*16*	*16*
5	*5*	…	…	…
4	*3*			
4	*4*			
3	*3*	…	…	…
25	*23*	*107*	*91*	*98*

$\bar{x} = 4'166 \quad \bar{y} = 3'833 \quad \sigma_x = 0'691 \quad \sigma_y = 0'689 \quad \sigma_{xy} = 0'365 \quad r = 0'766$ *rec*

de regressió y/x

$$y - 3'833 = \left(\frac{0'365}{0'691^2}\right)(x - 4'166) \qquad y = 0'764x + 0'648$$

recta de regressió x/y

$$x - 4'166 = \left(\frac{0'365}{0'689^2}\right)(y - 3'833) \qquad y = 1'888x - 4$$

b) angle entre les dues rectes $tg\alpha = \dfrac{1'88 - 0'764}{1 + 1'88 \cdot 0'764} = 0'458 \qquad \alpha = 24'61^o$

Les rectes formen un angle de 24'61º i la relació no és massa forta.

2.9

S'ha fet un estudi de l'altura i pes en sis nens de la mateixa edat donant com a resultat,

Altura (x) cm	*120*	*110*	*140*	*130*	*125*	*115*
Pes (y) Kg	*25*	*30*	*35*	*25*	*20*	*20*

es demana: a) la covariància i el coeficient de correlació, b) estudi de la dependència de les dues variables.

RAONAMENT

a)

Altura(x_i)	*Pes*(y_i)	x_i^2	y_i^2	$x_i y_i$
120	*25*	*14400*	*625*	*3000*
110	*30*	*12100*	*900*	*3300*
140	*35*	…	…	…
130	*25*			
125	*20*			

115	20	...	...	...
740	155	91850	4175	19250

$\bar{x} = 123'33$ $\bar{y} = 25'83$ $\sigma_x = 9'9$ $\sigma_y = 5'35$ $\sigma_{xy} = 22'72$ $r = 0'428$

b)

La relació entre les dues variables és positiva però fluixa.

2.10

En una mostra feta en una població de 1500 persones s'han estudiat dues variables x i y amb els següents resultats,

$\bar{x} = 14$ $\bar{y} = 100$ $\sigma_x = 2$ $\sigma_y = 25$ $\sigma_{xy} = 45$

es demana: a) regressió lineal que millor aproxima el valor de y en funció de x, b) calcula el valor esperat de y si x=15.

RAONAMENT

$r = \frac{45}{50} = 0'9$ *és una bona dependència*

a) *recta de regressió de y/x*

$y - 100 = \left(\frac{45}{4}\right)(x - 14) \quad y = 11'25x - 57'5$

b) $y(15) = 111'25$

2.11

En una mostra de vuit observacions de dues variables x i y s'han obtingut els següents resultats:

$\bar{x} = 3$ $\bar{y} = 5$ $\sigma_{xy} = -7$ $\sigma_x^2 = 6$ $\sigma_y^2 = 12$

es demana: a) recta de regressió de y sobre x, b) coeficient de determinació amb el percentatge no acceptable per la variació de y, c) valor esperat per la variable y si x=4

RAONAMENT

a) recta de regressió de y sobre x $y = -1'1667x + 8'5$

b) coeficient de determinació $r^2 = \frac{(-7)^2}{6 \cdot 12} = 0'68 \rightarrow 68\%$ de fiabilitat

c) y(4)=3'833 poc fiable.

2.12

En un grup de vuit pacients infantils es mesuren el pes (kg) i l'edat (anys) obtenint els següents resultats:

Edat	12	8	10	11	7	7	10	14
Pes	58	42	51	54	40	39	49	56

es demana: a) estudieu la dependència de les dues variables. b) recta de regressió de l'edat en funció del pes i del pes en funció de l'edat.

RAONAMENT

a)

Edat(x_i)	Pes(y_i)	x_i^2	y_i^2	$x_i y_i$
12	58	144	3364	696
8	42	64	1764	336
10	51	...	...	...
11	54			
7	40			
7	39			
10	49			
14	56	...	...	...
79	389	823	19303	3963

$\bar{x} = 9'875$ $\bar{y} = 48'625$ $\sigma_x = 2'315$ $\sigma_y = 6'963$ $\sigma_{xy} = 15'203$

$r = 0'9431$ la dependència és molt forta.

b)

pes en funció de l'edat $y = 2'836x + 20'612$

edat en funció del pes $x = 0'313y - 5'373$

2.13

De la següent distribució bidimensional, es demana:

Y/X	[0,1)	[1,2)	[2,3)	[3,4)	[4,5)	[5,6)	[6,7]
[1,2)	2	2	1				
[2,3)		1	2	4	1	1	
[3,4]					1	2	3

a) separar les variables i taula de la distribució, b) recta de regressió de y sobre x, c) coeficient de correlació.

RAONAMENT

x_i	n_i
0’5	2
1’5	3
2’5	3
3’5	4
4’5	2
5’5	3
6’5	3
-	20

y_i	n_i
1’5	5
2’5	9
3’5	6
-	20

x_i	y_i	n_i	$n_i\,x_i$	$n_i\,y_i$	$n_i\,x_i^2$	$n_i\,y_i^2$	$n_i\,x_iy_i$
0’5	1’5	2	1	3	0’5	4’5	1’5
1’5	1’5	2	3	3	4’5	4’5	4’5
1’5	2’5	1	1’5	2’5	2’25	6’25	3’75
2’5	1’5	1	2’5	1’5	6’25	2’25	3’75
2’5	2’5	2	5	5	12’5	12’5	12’5
3’5	2’5	4	14	10	49	25	35
4’5	2’5	1	4’5	2’5	20’25	6’25	11’25
4’5	3’5	1	4’5	3’5	20’25	12’25	15’75
5’5	2’5	1	5’5	2’5	30’25	6’25	13’75
5’5	3’5	2	11	7	60’5	24’5	38’5
6’5	3’5	3	19’5	10’5	126’75	36’75	68’25
-	-	20	72	51	333	141	208’5

$\bar{x} = 3'6 \qquad \bar{y} = 2'55 \qquad \sigma_x = 1'92 \qquad \sigma_y = 0'74 \qquad \sigma_{xy} = 1'245$

b)Recta de regressió de y sobre x $y = 0'338x + 1'333$
c) $r = 0'88$ *alt i positiu .*
La relació entre les variables és estreta i directa.